PHY2300 Physique médicale
Hiver 2024
TP n°5
7 février 2024.

Mise en Contexte

Dans ce TP, nous aborderons le théorème de la coupe centrale sur deux aspects différents.

1. Considérons en premier que nous avons mesuré un sinogramme donné par

$$\mathcal{R}f(\xi,\theta) = \frac{e^{-\pi b^2\xi^2}}{|b|}, \tag{1}$$

où b est une constante réelle non nulle.

(a) Trouvez la transformée de Fourier d'une tranche $p_\theta(\xi)$ du sinogramme.

Toutes les projections, peu importe le θ, sont identiques.

Alors,

$$\begin{aligned} p_\theta(\xi) &= \frac{e^{-\pi b^2\xi^2}}{|b|} \\ \Rightarrow \mathcal{F}\left[p_\theta(\xi)\right]_k &= \frac{e^{-\pi k^2/b^2}}{b^2} \end{aligned} \qquad \text{(Tel que vu en classe)}$$

(b) Faites la convolution de $p_\theta(\xi)$ et de $\mathcal{F}^{-1}|k|$.

Dans le domaine spatial, l'opération serait assez complexe, puisqu'il faudrait calculer $\mathcal{F}^{-1}|k|$, puis faire la convolution (voir problème suivant).

Grâce au théorème de convolution, le tout peut être évité :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[p_\theta(\xi) \star \mathcal{F}^{-1}[|k|]\right] &= \mathcal{F}\left[p_\theta(\xi)\right]_k \cdot \mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}[|k|]\right] \\ &= \mathcal{F}\left[p_\theta(\xi)\right]_k \cdot |k| \\ &= |k|\frac{e^{-\pi k^2/b^2}}{b^2} \end{aligned}$$

(c) Appliquez le théorème de la coupe centrale pour retrouver $f(x,y)$.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi(xk\cos\theta + yk\sin\theta)}|k|\mathcal{F}\left[p_\theta(\xi)\right]_k \mathrm{d}k\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi(xk\cos\theta + yk\sin\theta)}|k|\frac{e^{-\pi k^2/b^2}}{b^2}\mathrm{d}k\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

En prenant le changement de variables $\aleph = k\cos\theta$ et $\beth = k\sin\theta$,

$$\begin{aligned}
\Rightarrow J = \frac{\partial(\aleph,\beth)}{\partial(k,\theta)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial\aleph}{\partial k} & \frac{\partial\aleph}{\partial\theta} \\ \frac{\partial\beth}{\partial k} & \frac{\partial\beth}{\partial\theta} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \cos\theta & -k\sin\theta \\ \sin\theta & k\cos\theta \end{vmatrix} \\
&= k(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = k \\
\Rightarrow \mathrm{d}\aleph\mathrm{d}\beth &= |J|\mathrm{d}k\mathrm{d}\theta \\
&= \left|\frac{\partial(\aleph,\beth)}{\partial(k,\theta)}\right|\mathrm{d}k\mathrm{d}\theta \\
&= |k|\mathrm{d}k\mathrm{d}\theta \\
\Rightarrow f(x,y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi(x\aleph+y\beth)}|k|\frac{e^{-\pi k^2/b^2}}{b^2}\mathrm{d}\aleph\mathrm{d}\beth \\
&= \frac{1}{b^2}\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\pi\left(\frac{\aleph^2}{b^2}+\frac{\beth^2}{b^2}\right)}\right] \\
&= \frac{1}{b^2}\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\pi\left(\frac{\aleph^2}{b^2}\right)}\right]\cdot\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\pi\left(\frac{\beth^2}{b^2}\right)}\right] \quad \text{(Par séparation de la fonction)} \\
&= \frac{1}{b^2}\left[|b|e^{-\pi x^2 b^2}\right]\cdot\left[|b|e^{-\pi y^2 b^2}\right] \\
&= \frac{|b^2|}{b^2}e^{-\pi b^2(x^2+y^2)} \\
f(x,y) &= e^{-\pi b^2(x^2+y^2)}
\end{aligned}$$

(d) Calculez la projection de $f(x,y)$ pour voir si vous retrouvez l'équation 1.
Puisque $f(x,y)$ est symétrique par rapport à l'origine, toutes les projections seront les mêmes. Nous n'avons donc qu'à n'en calculer une.
Pour une projection sur l'axe des x :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}f(\xi,\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi b^2(\xi^2+y^2)}\mathrm{d}y \\
&= e^{-\pi b^2\xi^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi b^2 y^2)}\mathrm{d}y \\
&= e^{-\pi b^2\xi^2}\left(\frac{1}{|b|}\right) \\
&= \frac{e^{-\pi b^2\xi^2}}{|b|}
\end{aligned}$$

2. Dans le théorème de la tranche centrale, nous utilisons le filtre $|k|$ dans l'espace de Fourier.
   (a) À quoi ressemble ce filtre dans l'espace physique, i.e. $\mathcal{F}^{-1}(|k|)$?
   Indice : Il faudra borner l'intégrale à une fréquence maximale, pour qu'elle puisse converger.

Supposons que le filtre n'aille que de $-a$ à a dans l'espace des fréquences, i.e.

$$\tilde{k}(k) = \begin{cases} |k| & , \text{si } -a \geq k \geq a \\ 0 & , \text{sinon} \end{cases}$$

De façon évidente, $\lim_{a\to\infty} \tilde{k} = |k|$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}[\tilde{k}] &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{k} e^{i2\pi kx} \mathrm{d}k \\
&= \int_{-a}^{a} |k| e^{i2\pi kx} \mathrm{d}k \\
&= \int_{-a}^{0} -k e^{i2\pi kx} \mathrm{d}k + \int_{0}^{a} k e^{i2\pi kx} \mathrm{d}k
\end{aligned}$$

Observons l'intégrale indéfinie en premier :

$$\int k e^{i2\pi kx} \mathrm{d}k = \frac{k e^{i2\pi kx}}{i2\pi x} - \frac{1}{i2\pi x} \int e^{i2\pi kx} \mathrm{d}k$$

En prenant $u = k$ et $\mathrm{d}v = e^{i2\pi kx}\mathrm{d}k$ (et donc $\mathrm{d}u = \mathrm{d}k$, $v = \dfrac{e^{i2\pi kx}}{i2\pi x}$).

$$\begin{aligned}
&= \frac{k e^{i2\pi kx}}{i2\pi x} - \frac{e^{i2\pi kx}}{(i2\pi x)^2} \\
&= \frac{e^{i2\pi kx}}{i2\pi x} \left(k - \frac{1}{i2\pi x} \right) \\
\Rightarrow \mathcal{F}^{-1}[\tilde{k}] &= -\frac{e^{i2\pi kx}}{i2\pi x} \left(k - \frac{1}{i2\pi x} \right) \Big|_{-a}^{0} + \frac{e^{i2\pi kx}}{i2\pi x} \left(k - \frac{1}{i2\pi x} \right) \Big|_{0}^{a} \\
&= \frac{-1}{2i\pi x} \left[\frac{-1}{2i\pi x} \right] + \frac{e^{-i2\pi xa}}{2i\pi x} \left[-a + \frac{-1}{2i\pi x} \right] \\
&+ \frac{e^{i2\pi xa}}{2i\pi x} \left[a + \frac{-1}{2i\pi x} \right] - \frac{1}{2i\pi x} \left[\frac{-1}{2i\pi x} \right] \\
&= \frac{-1}{2\pi^2 x^2} + \frac{a}{2i\pi x} \left(e^{i2\pi xa} - e^{-i2\pi xa} \right) + \frac{1}{-4\pi^2 x^2 a^2} \left(-e^{-i2\pi xa} - e^{i2\pi xa} \right) \\
&= \frac{-1}{2\pi^2 x^2} + \frac{a}{2i\pi x} [2i \sin(2\pi xa)] + \frac{1}{4\pi^2 x^2} [2\cos(2\pi xa)] \\
&= \frac{-1}{2\pi^2 x^2} + \frac{a \sin(2\pi xa)}{\pi x} + \frac{\cos(2\pi xa)}{2\pi^2 x^2} \\
&= \frac{a \sin(2\pi xa)}{\pi x} + \frac{1}{2\pi^2 x^2} \Big[\cos(2\pi xa) - 1 \Big]
\end{aligned}$$

(b) Que pouvons-nous conclure sur les limites (*Bah dum ts*) de la rétro-projection filtrée ?
Le filtre $|k|$, pris seul, doit être limité dans l'espace physique, avec une fréquence maximale, sinon il diverge (même en ayant pris ici une valeur principale de Cauchy).

Cela implique que les fonctions de projection dont la transformée de Fourier s'étend à l'infinie perdra les hautes fréquences. Dans une image, cela représente les fins détails et les aspérités, comme les contours.
Dans ce sens, reconstruire implique de perdre des informations de précision, sauf si la transformée de Fourier d'une projection va suffisamment rapidement à 0.