PHY2300 – Physique médicale

Travail pratique n°10 – Fonction d'étalement du point

27 mars 2024

Dans ce TP, nous analyserons le principe de fonction d'étalement du point. Nous partirons de cas simples, en les complexifiant. Ce TP sert de préambule pour le devoir 4.

Question 1 : Sphère émettrice

1. Considérons une sphère ponctuelle émettrice d'un signal. Dans le contexte d'imagerie, il s'agirait d'un faisceau de photons. Supposons que cette sphère se situe à une distance d d'un écran de dimensions infinies.

   Supposons que cette sphère émette une intensité de signal totale de I de manière isotropique (la même dans toutes les directions).

   Quel serait le signal s perçu sur l'écran ?

   Indice : Par simplicité, le problème peut être presque réduit à un cas 2D.

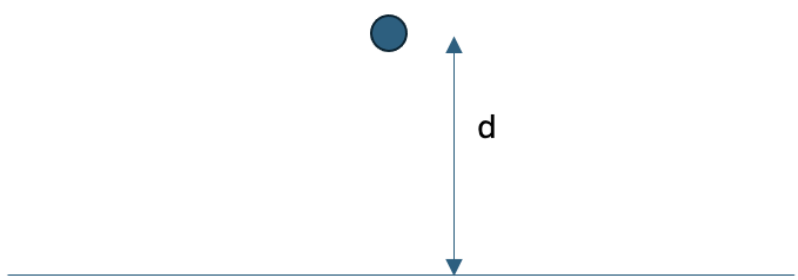

Figure 1 – Question 1

Solution : En considérant un triangle, comme dans la figure 2, il est possible de voir que la distance par rapport à l'axe central est donné par

$$r^2 = d^2 + x^2.$$

Pour un signal isotropique, l'intensité du signal décroit avec la distance au carré :

$$I(r) = \frac{I}{4\pi r^2},$$

où le dénominateur représente la surface d'une sphère. L'intensité du signal sur l'écran sera donc de

$$s(x) = \frac{I}{4\pi(x^2 + d^2)} \tag{1}$$

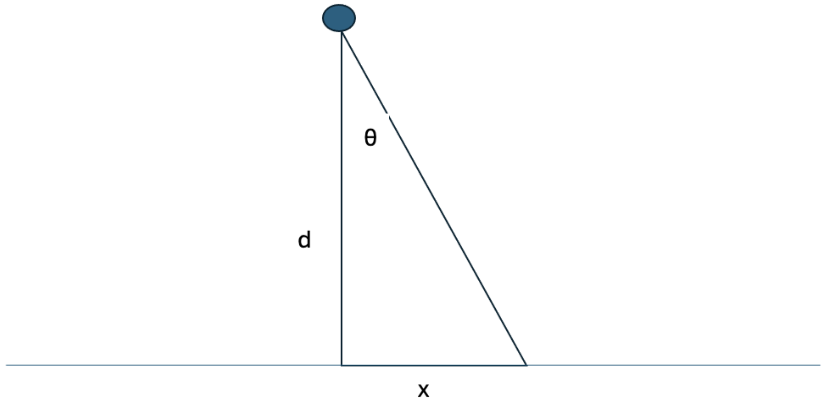

FIGURE 2 – Question 1

Si nous considérons l'écran en deux dimensions :

$$s(x,y) = \frac{I}{4\pi(x^2+y^2+d^2)} \quad (2)$$

2. Représentez $s(x,y)$ graphiquement (vous pouvez le faire en utilisant qu'une seule variable).

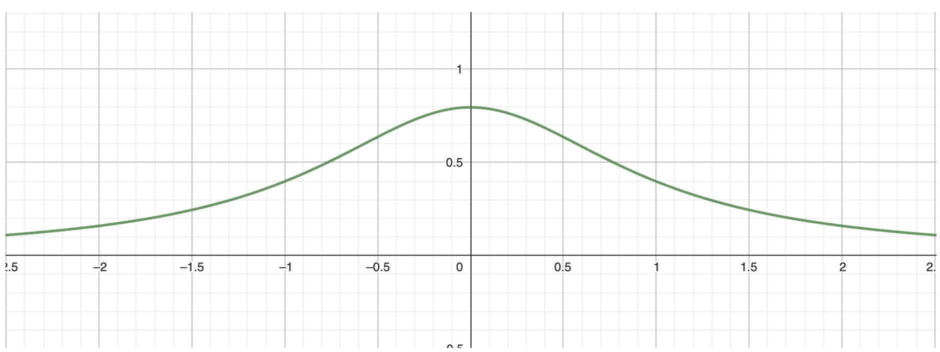

FIGURE 3 – Graphique de l'équation 2

3. Est-ce que ce résultat est raisonable ? Oui. Le signal décroit avec le carré de la distance, ce qui réapparait ici. De façon pratique, un objet loin d'une source reçoit beaucoup moins de signal.
4. Quel est le signal total perçu sur l'écran ? Expliquez pourquoi I n'est pas la réponse !
   Le résultat est la moitié du signal, parce que la moitié du signal partant vers le haut est perdue !

Question 2 : Faisceau dévié

1. Supposons qu'un signal I_0 arrive du haut et frappe la sphère ponctuelle. Supposons qu'une fraction $\tilde{I}$ soit absorbée et disparaîsse.

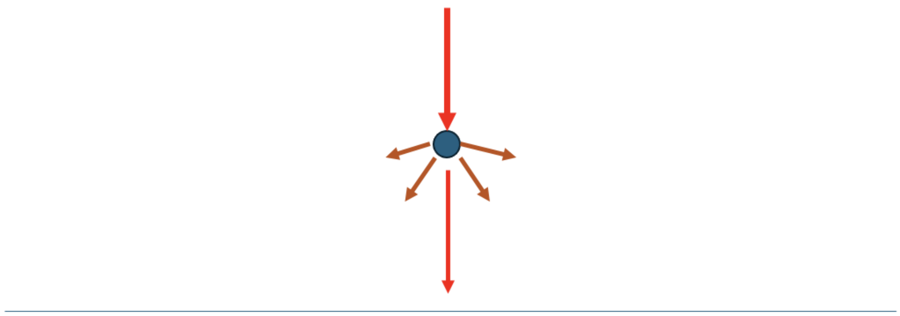

FIGURE 4 – Question 2

Quel sera le signal sur l'écran ? Puisque seulement une partie centrale demeure, le signal est 0 partout sauf à $x = y = 0$:

$$s(x,y) = \begin{cases} I_0 - \tilde{I} & \text{, si } x = y = 0 \\ 0 & \text{, sinon} \end{cases} \tag{3}$$

2. Supposons maintenant que la partie absorbée, $\tilde{I}$, soit en fait réémise de façon isotropique.

   Quel sera alors le signal sur l'écran ? Le résultat est la première question mélangée avec l'équation précédente.

$$s(x,y) = \begin{cases} I_0 - \tilde{I} + \dfrac{\tilde{I}}{4\pi(d^2)} & \text{, si } x = y = 0 \\ \dfrac{\tilde{I}}{4\pi(x^2+y^2+d^2)} & \text{, sinon} \end{cases} \tag{4}$$

   En effet, le point central reçoit une double contribution, soit la partie réémise vers lui et une partie issue de la diffusion.

   De façon compacte :

$$s(x,y) = (I_0 - \tilde{I})\delta(x,y) + \frac{\tilde{I}}{4\pi(x^2+y^2+d^2)} \tag{5}$$

3. Représentez $s(x,y)$ graphiquement (vous pouvez le faire en utilisant qu'une seule variable).
4. Décrivez brièvement comment ce type de système apparaît en physique médicale. Il s'agit exactement du principe d'un faisceau de photons incident sur un objet, où une partie est dévié grâce au coefficient d'atténuation. Les photons diffusées par effet Compton serait ceux envoyés ailleurs sur l'écran. Le tout n'est pas isotropique en pratique, d'où la prochaine question.

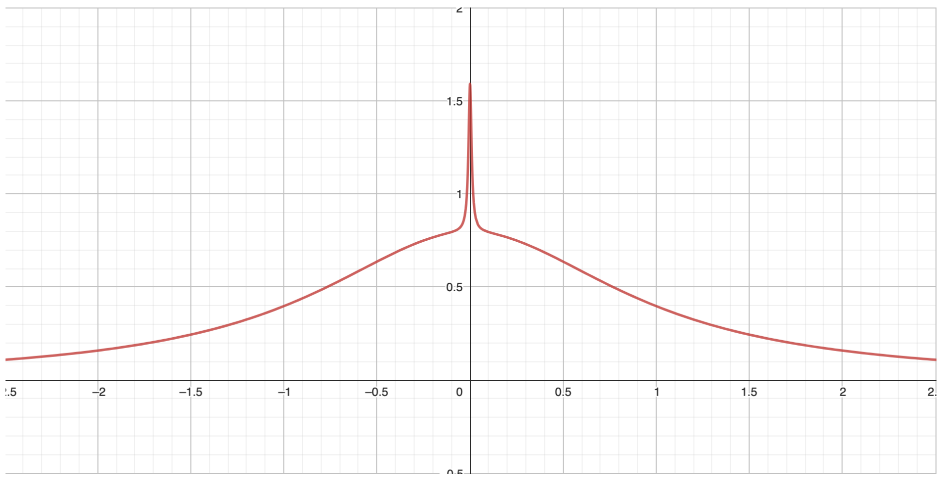

FIGURE 5 – Graphique de l'équation 5

Question 3 : Diffusion non-isotropique I

Supposons qu'un signal I_0 arrive du haut et frappe la sphère ponctuelle. Si la diffusion n'est plus isotropique, mais suit une autre fonction de dispersion, supposons

$$I(\theta, \phi) = \alpha \frac{\tilde{I} \cos(\theta/2)}{4\pi r^2},$$

où θ est l'angle de déviation par rapport à l'axe central reliant la sphère, ϕ est l'autre angle et α est une constante de normalisation.

À noter que $\theta \in [0, \pi]$.

1. Normalisez I, i.e. assurez-vous que

   $$\int \int I \mathrm{d}A = \tilde{I},$$

   c'est-à-dire que le signal total émis soit le signal total...

À ne pas oublier, le rayon est donné par $r^2 = x^2 + y^2 + d^2$:

$$\begin{aligned}
\int\int I(\theta,\phi)\mathrm{d}A &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \alpha\frac{\tilde{I}\cos(\theta/2)}{4\pi r^2} r^2 \sin(\theta)\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta \\
&= \alpha\frac{\tilde{I}}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\theta/2)\sin(\theta)\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta \\
&= \alpha\frac{\tilde{I}2\pi}{4\pi}\int_0^{\pi} \cos(\theta/2)\sin(\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \alpha\frac{\tilde{I}}{2}\int_0^{\pi} \cos(\theta/2)\sin(\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \alpha\frac{\tilde{I}}{2}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\sin(3\theta/2) + \frac{1}{2}\sin(\theta/2)\mathrm{d}\theta \\
&\qquad\qquad (\text{Avec } \cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)) \\
&= \alpha\frac{\tilde{I}}{4}\left(-\frac{2}{3}\cos(3\theta/2) - 2\cos(\theta/2)\right)\Bigg|_0^{\pi} \\
&= \alpha\frac{\tilde{I}}{4}\left(-0 + \frac{2}{3} - 0 + 2\right) \\
&= \alpha\frac{\tilde{I}}{8}\frac{8}{3} \\
&= \alpha\frac{2\tilde{I}}{3} \\
\Rightarrow \alpha &= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

2. Calculez le nouveau signal mesuré sur l'écran.

Commençons en ne considérant que la diffusion.

$$\begin{aligned}
s(x,y) &= \frac{3\tilde{I}\cos(\theta/2)}{8\pi(x^2+y^2+d^2)} \\
&= \frac{3\tilde{I}\sqrt{1+\cos\theta}}{8\sqrt{2}\pi(x^2+y^2+d^2)} \\
&= \frac{3\tilde{I}\sqrt{1+\frac{d}{r}}}{8\sqrt{2}\pi(x^2+y^2+d^2)} \\
&= \frac{3\tilde{I}\sqrt{r+d}}{8\sqrt{2}\pi r(x^2+y^2+d^2)} \\
&= \frac{3\tilde{I}\sqrt{r+d}}{8\sqrt{2}\pi(x^2+y^2+d^2)^{3/2}} \\
&= \frac{3\tilde{I}\sqrt{\sqrt{x^2+y^2+d^2}+d}}{8\sqrt{2}\pi(x^2+y^2+d^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

En remettant la diffusion :

$$s(x,y) = \begin{cases} I_0 - \tilde{I} + \dfrac{3\tilde{I}}{8\pi d^2} & \text{, si } x = y = 0 \\ \dfrac{3\tilde{I}\sqrt{\sqrt{x^2+y^2+d^2}+d}}{8\sqrt{2}\pi(x^2+y^2+d^2)^{3/2}} & \text{, sinon} \end{cases} \tag{6}$$

3. Faites en un graphique rapide.

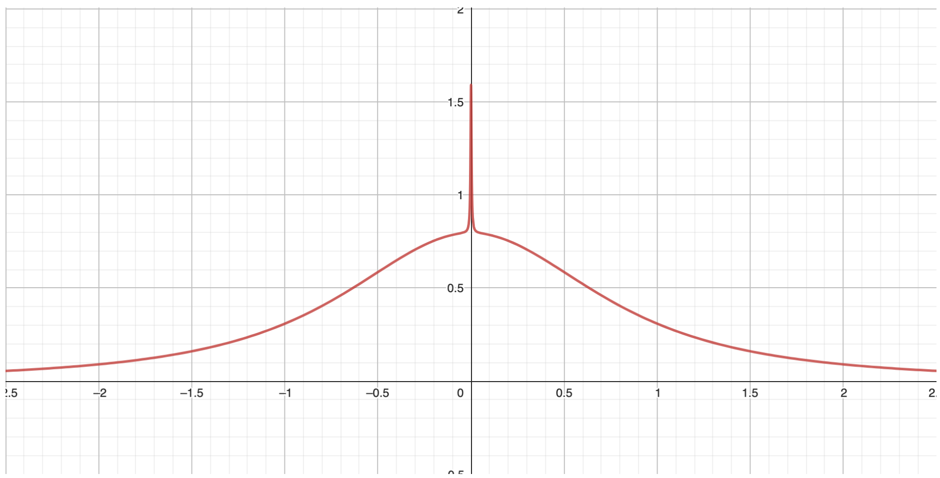

FIGURE 6 – Graphique de l'équation 6

Question 4 : Diffusion non-isotropique II

Supposons qu'un signal I_0 arrive du haut et frappe la sphère ponctuelle. Si la diffusion n'est plus isotropique, mais suit une autre fonction de dispersion, supposons

$$I(\theta,\phi) = \alpha\frac{\tilde{I}\cos^2(\theta/2)}{4\pi r^2},$$

où θ est l'angle de déviation par rapport à l'axe central reliant la sphère, ϕ est l'autre angle et α est une constante de normalisation. À noter que $\theta \in [0,\pi]$.

1. Normalisez I, i.e. assurez-vous que
$$\int\int I \mathrm{d}A = \tilde{I},$$
c'est-à-dire que le signal total émis soit le signal total...

À ne pas oublier, le rayon est donné par $r^2 = x^2 + y^2 + d^2$:

$$\begin{aligned}
\int\int I(\theta,\phi)\mathrm{d}A &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \alpha\frac{\tilde{I}\cos^2(\theta/2)}{4\pi r^2} r^2 \sin(\theta)\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta \\
&= \alpha\frac{\tilde{I}}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta/2)\sin(\theta)\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta \\
&= \alpha\frac{\tilde{I}2\pi}{4\pi}\int_0^{\pi} \cos^2(\theta/2)\sin(\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \alpha\frac{\tilde{I}}{2}\int_0^{\pi} \cos^2(\theta/2)\sin(\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \alpha\frac{\tilde{I}}{2}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left(1+\cos(\theta)\right)\sin(\theta)\mathrm{d}\theta && \left(\text{Avec } \cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}\right) \\
&= \alpha\frac{\tilde{I}}{2}\int_0^{\pi} -\frac{1}{2}\left(1+u\right)\mathrm{d}u && (\text{Avec } u = \cos\theta) \\
&= -\alpha\frac{\tilde{I}}{4}\left(u+\frac{u^2}{2}\right)\Big|_0^{\pi} \\
&= -\alpha\frac{\tilde{I}}{4}\left(\cos\theta+\frac{\cos^2\theta}{2}\right)\Big|_0^{\pi} \\
&= -\alpha\frac{\tilde{I}}{4}\left(-1-1+1-1\right) \\
&= -\alpha\frac{\tilde{I}}{4}(-2) \\
&= \alpha\frac{\tilde{I}}{2} \\
\Rightarrow \alpha = 2
\end{aligned}$$

2. Calculez le nouveau signal mesuré sur l'écran.

   Commençons en ne considérant que la diffusion.

$$\begin{aligned}
s(x,y) &= \alpha\frac{\tilde{I}\cos^2(\theta/2)}{4\pi r^2} \\
&= \frac{\tilde{I}\cos^2(\theta/2)}{2\pi r^2} \\
&= \frac{\tilde{I}\frac{1}{2}(1+\cos\theta)}{2\pi r^2} \\
&= \frac{\tilde{I}(1+\cos\theta)}{4\pi r^2} \\
&= \frac{\tilde{I}(1+\frac{d}{r})}{4\pi r^2} \\
&= \frac{\tilde{I}(r+d)}{4\pi r^3} \\
&= \frac{\tilde{I}(\sqrt{x^2+y^2+d^2}+d)}{4\pi\left(x^2+y^2+d^2\right)^{3/2}}
\end{aligned}$$

En remettant la diffusion :

$$s(x,y) = \begin{cases} I_0 - \tilde{I} + \dfrac{\tilde{I}}{2\pi d^2} & \text{, si } x = y = 0 \\ \dfrac{\tilde{I}(\sqrt{x^2+y^2+d^2}+d)}{4\pi\left(x^2+y^2+d^2\right)^{3/2}} & \text{, sinon} \end{cases} \tag{7}$$

3. Faites en un graphique rapide.

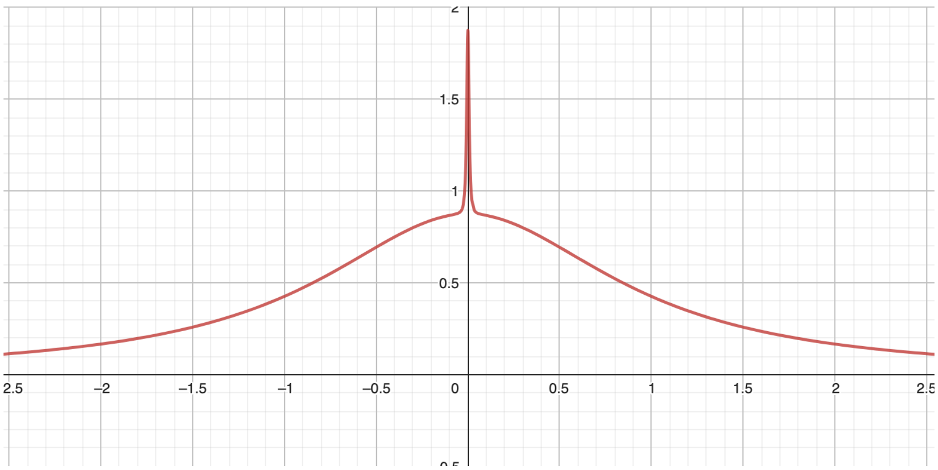

FIGURE 7 – Graphique de l'équation 7

5 : Tous les graphes

Mettez ensemble toutes les distributions sur un même graphique pour comparer.

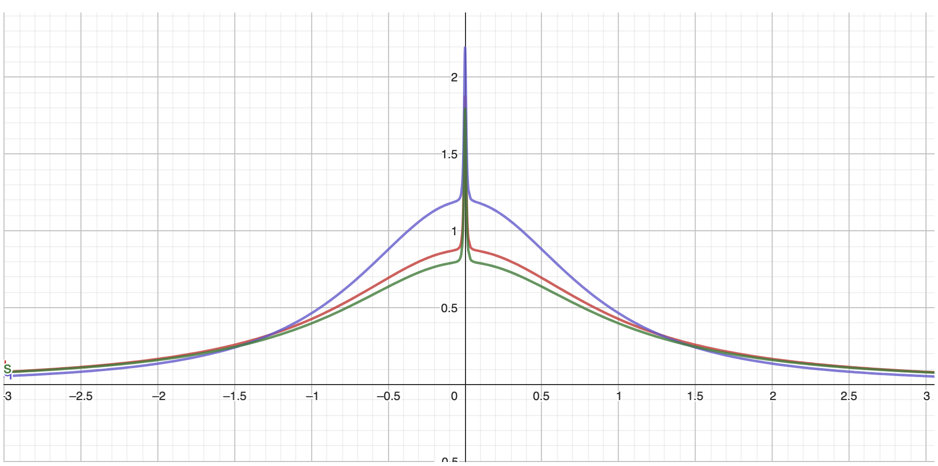

FIGURE 8 – Graphique des équations 5 (vert), 6 (mauve), 7 (rouge)