

# Dispersion et Prisme

par Philippe Laporte

## 1 Introduction

Dans ce cours document, la dispersion d'un faisceau polyénergétique sera analysée. Le but sera de voir la trajectoire prise par les différentes couleurs (ou longueurs d'ondes  $\lambda$  ou énergies  $E$ ).

L'idée est de développer un modèle plus général et plus malléable que celui utilisé en classe.

## 2 Mise en Contexte

Soit un prisme triangulaire suspendu dans l'air, dont les angles de la partie triangulaire sont  $\alpha, \beta, \gamma$ . Si un faisceau polyénergétique est incident sur le prisme, faisant un angle de  $90^\circ - \phi$  avec la surface, quelle seront les trajectoires du faisceau à long terme, en prenant en compte la dispersion. Supposons que l'indice de réfraction du prisme est de  $n_\lambda$ , où  $\lambda$  est la longueur d'onde d'une des composantes du faisceau.

La figure 1 illustre la géométrie de la situation.

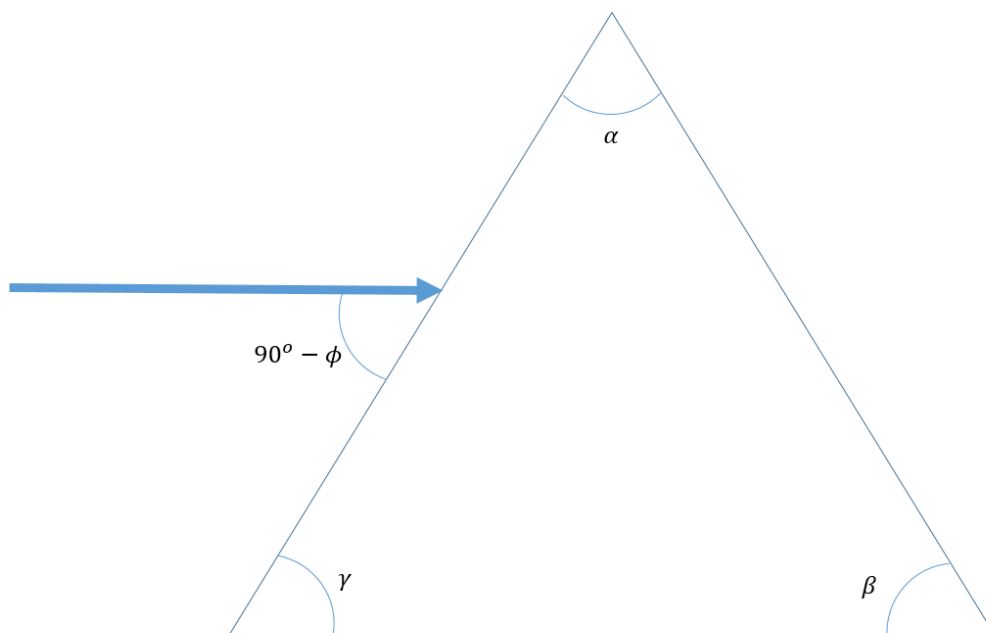


Figure 1: Prisme triangulaire et faisceau incident

## 3 Prémisses

Plusieurs prémisses devront être considérées pour rendre l'analyse plus simple.

En premier lieu, il sera supposé que les rayons réfractés dans le prisme, après l'entrée, seront incident sur la face opposée à l'angle  $\gamma$  (en d'autres mots, les différents rayons réfractés tomberont sur la même face et pas deux différentes).

En deuxième lieu, il sera supposé que l'indice de réfraction pour les différentes longueurs d'onde suivra un modèle continu et monotoniquement décroissant ( $\lambda_1 > \lambda_2 \Rightarrow n_1 < n_2$ ). Cela permettra, entre autres, de ne considérer que le rayon le plus énergétique et le moins énergétique, en négligeant tous les rayons intermédiaires.

En troisième lieu, nous supposons que la loi de Snell-Descartes (abréviée LSD, ou loi de la réfraction) soit applicable sans problème, signifiant que nous demeurerons dans un contexte de physique classique.

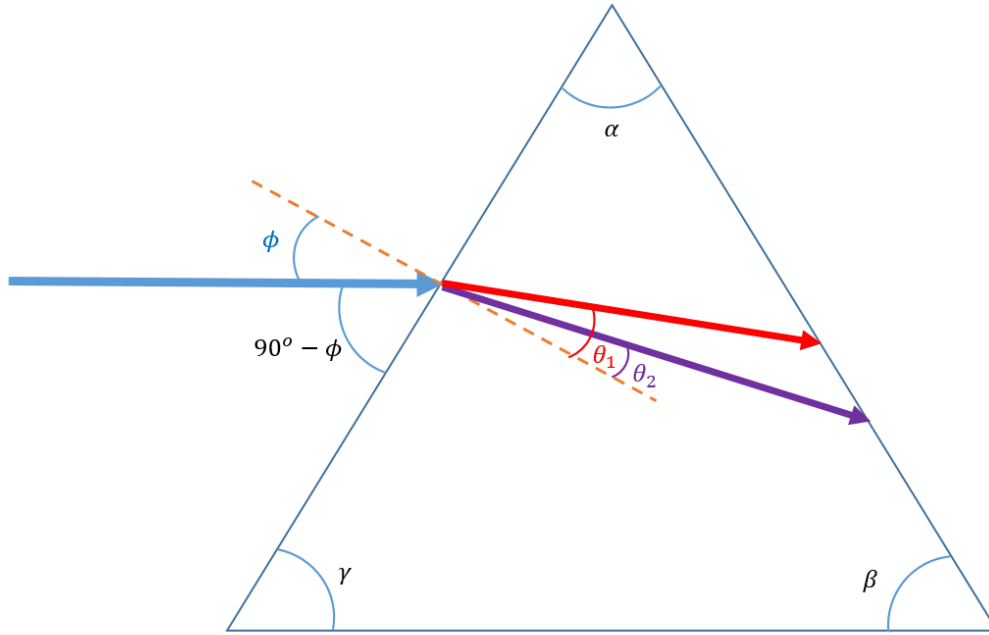


Figure 2: Première réfraction dans le prisme

## 4 Analyse

### 4.1 Entrée dans le Prisme

Considérons la première réfraction, soit celle survenant lors de la transition de l'air au prisme. Puisque l'indice de réfraction est continu et monotone, il est possible de ne considérer les indices de réfractons que des rayons les plus et moins énergétiques (avec la plus courte et la plus longue longueurs d'onde). Pour utiliser l'analogie des couleurs visibles (quoique le tout s'applique également pour des faisceaux hors du spectre visible), le rayon avec la plus grande longueur d'onde sera rouge et celui avec la plus courte sera violet. L'indice de réfraction associé au rouge sera  $n_1$  et celui associé au violet sera  $n_2$ , satisfaisant  $n_1 < n_2$ .

Pour calculer l'angle réfracté, la loi de Snell-Descartes sera utilisée:

$$n_{\text{in}} \sin(\theta_{\text{in}}) = n_{\text{out}} \sin(\theta_{\text{out}}) \quad (1)$$

Puisque ce seront les angles qui seront d'intérêt, nous utiliserons la forme où l'angle est mis en évidence:

$$\theta_{\text{out}} = \arcsin\left(\frac{n_{\text{in}} \sin(\theta_{\text{in}})}{n_{\text{out}}}\right) \quad (2)$$

Pour chacun des premiers rayons réfractés, l'indice de réfraction du milieu initial sera 1.00 ( $n_{\text{in}} = 1.00$ ) et celui du milieu intérieur sera  $n_1$  ou  $n_2$ . L'angle avant la réfraction sera  $\phi$ , puisqu'il faut prendre l'angle formé entre le rayon et la normale.

Ainsi, l'angle réfracté  $\theta_1$  (pour le rouge), sera

$$\theta_1 = \arcsin\left(\frac{\sin(\phi)}{n_1}\right) \quad (3)$$

et  $\theta_2$  (pour le violet) sera

$$\theta_2 = \arcsin\left(\frac{\sin(\phi)}{n_2}\right). \quad (4)$$

Ces deux équations s'obtiennent à partir de l'équation 2.

Le faisceau initial sera donc séparé en deux, créant deux trajectoires. C'est le début de la dispersion. La figure 2 illustre comment les faisceaux sont séparés.

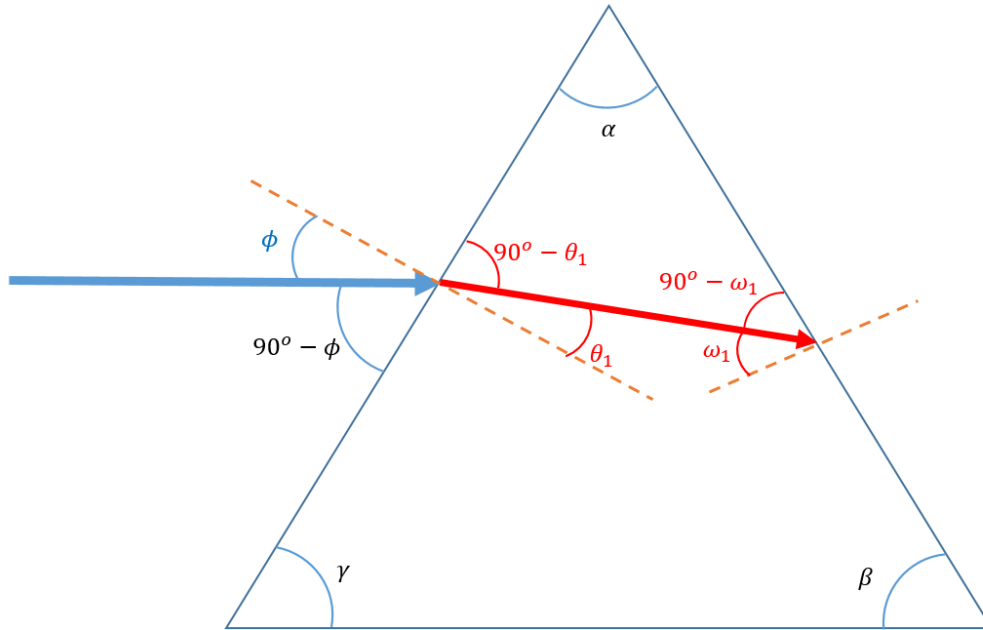


Figure 3: Angle d'incidence avant la sortie dans le prisme

## 4.2 Angle d'Incidence à l'Intérieur du Prisme

Les deux rayons dispersés frapperont, dans le prisme, la face opposée à l'angle  $\gamma$  (par prémisses). Pour déterminer comment ils sortiront du prisme, il faudra trouver l'angle d'incidence sur le côté opposé à l'angle  $\gamma$ . Sans perte de généralité, considérons le rayon rouge (appelé 1) et suivons son trajet. L'angle incident pour la prochaine réfraction sera dénoté  $\omega_1$ . La méthode pour obtenir l'angle  $\omega_2$ , causé par le rayon 2, sera analogue. Par complémentarité des angles, l'angle entre le rayon réfracté entrant dans le prisme et la surface du prisme sera  $90^\circ - \phi$ . Pour satisfaire le fait que la somme totale des angles internes d'un triangle est de  $180^\circ$ , il faudra que l'angle entre le rayon incident à la face opposé à l'angle  $\gamma$  et cette face du prisme soit de

$$180^\circ - \beta - (90^\circ - \theta_1) = 90^\circ - \beta + \theta_1.$$

Puisque nous voulons l'angle  $\omega_1$ , soit celui entre la normale et le rayon, complémentaire au précédent, alors

$$\omega_1 = \beta - \theta_1 = \beta - \arcsin\left(\frac{\sin(\phi)}{n_1}\right) \quad (5)$$

Par une méthode analogue,

$$\omega_2 = \beta - \theta_2 = \beta - \arcsin\left(\frac{\sin(\phi)}{n_2}\right) \quad (6)$$

La figure 3 illustre les angles pertinents pour cette étape de l'analyse.

## 4.3 Sortie du Prisme et Deuxième Réfraction

Maintenant que les nouveaux angles d'incidence  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont calculés, il est possible de déterminer les angles de sorties (réfractés) du prisme. Le processus sera fait pour le faisceau 1 (rouge). Les démarches pour le faisceau 2 (violet) seront identiques.

Si l'angle de sortie est  $\xi_1$ , alors, par la loi de Snell-Descartes (équation 2), cet angle sera

$$\xi_1 = \arcsin\left\{n_1 \sin\left[\beta - \arcsin\left(\frac{\sin(\phi)}{n_1}\right)\right]\right\} \quad (7)$$

Ici, l'indice de réfraction du milieu extérieur est 1.00 et l'indice de réfraction du milieu (du prisme) est  $n_1$ . De la même façon, l'angle de sortie du rayon 2 (violet) sera

$$\xi_2 = \arcsin\left\{n_2 \sin\left[\beta - \arcsin\left(\frac{\sin(\phi)}{n_2}\right)\right]\right\} \quad (8)$$

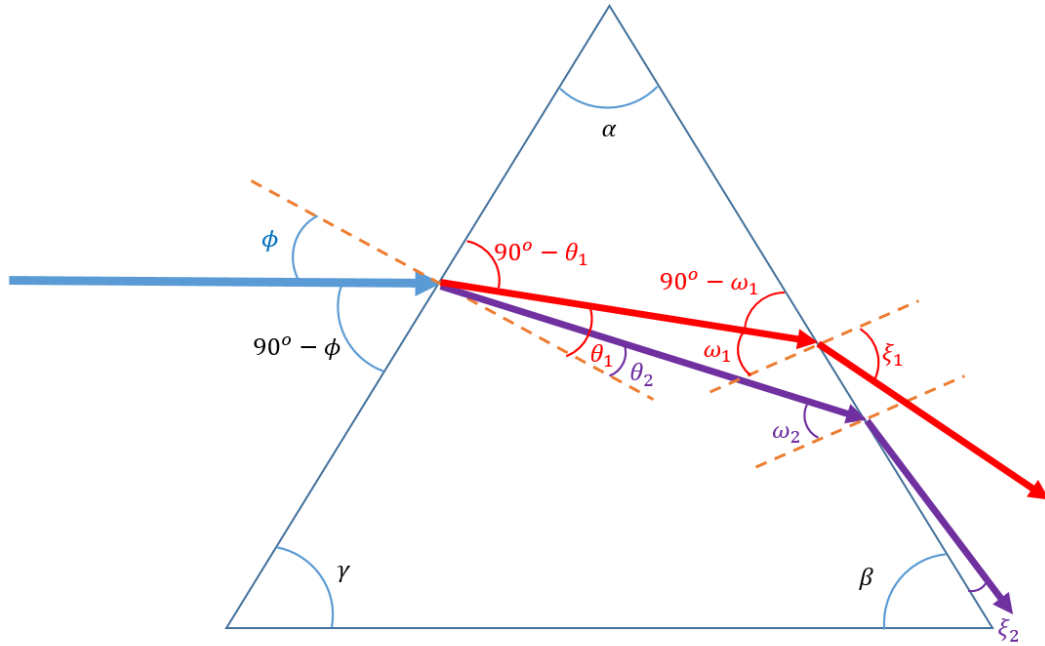


Figure 4: Réfraction pour la sortie des faisceaux

La figure 4 illustre les angles pertinents pour cette étape de l'analyse et la figure 5 illustre la trajectoire globale des faisceaux, en ayant retiré les informations superflues (i.e. celles nécessaires pour les calculs intermédiaires).

#### 4.4 Possible Réfraction

Maintenant, serait-il possible de séparer certaines des couleurs? En d'autres mots, serait-il possible, pour un prisme donné ( $n_1$ ,  $n_2$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  fixes) de faire sortir une partie du faisceau par une autre face, en choisissant un angle initial  $\phi$  judicieux? La réponse est oui, tant qu'une partie du faisceau subisse une réflexion totale interne, mais pas l'autre. En d'autres mots, il faudrait que le faisceau 1 (rouge) puisse être réfracté normalement, mais pas le faisceau 2 (violet), qui lui subirait une réflexion totale interne (RTI).

La figure 6 illustre la situation désirée. Les deux conditions à respecter ici seront:

1.  $n_1 \sin \left[ \beta - \arcsin \left( \frac{\sin(\phi)}{n_1} \right) \right] \leq 1$  ou  $\sin \xi_1 \leq 1$ ;
2.  $n_2 \sin \left[ \beta - \arcsin \left( \frac{\sin(\phi)}{n_2} \right) \right] \geq 1$  ou  $\sin \xi_2 \geq 1$ .

La condition (1) implique que le faisceau 1 soit réfracté et la condition (2) implique que le faisceau 2 soit réfléchi. Ces conditions sont obtenues à partir des équations 7 et 8 (le domaine de la fonction arcsinus étant  $[-1,1]$ ).

Pour chacune de ces deux conditions, il y a un cas critique, soit lorsque l'inégalité ( $\leq$  ou  $\geq$ ) correspond à l'égalité ( $=$ ). Ces deux cas critique correspondent à un angle minimal,  $\phi_{c,2}$ , et un angle maximal,  $\phi_{c,1}$ . Tout angle entre ces deux valeurs, soit  $\phi \in [\phi_{c,2}, \phi_{c,1}]$ , permettra de respecter les deux conditions ci-haut.

En considérant chacun de ces angles critiques, qui correspondent à la valeur de  $\phi$  lorsque  $\xi_i = 90^\circ$  et en rebrassant les équations 7 et 8, il est possible d'obtenir ces deux bornes:

1.  $\phi_{c,1} = \arcsin \left\{ n_1 \sin \left[ \beta - \arcsin \left( \frac{1}{n_1} \right) \right] \right\}$ ;
2.  $\phi_{c,2} = \arcsin \left\{ n_2 \sin \left[ \beta - \arcsin \left( \frac{1}{n_2} \right) \right] \right\}$ .

En connaissant les angles du prisme et ses indices de réfraction, il sera possible de connaître l'intervalle d'angles utiles pour séparer le faisceau.

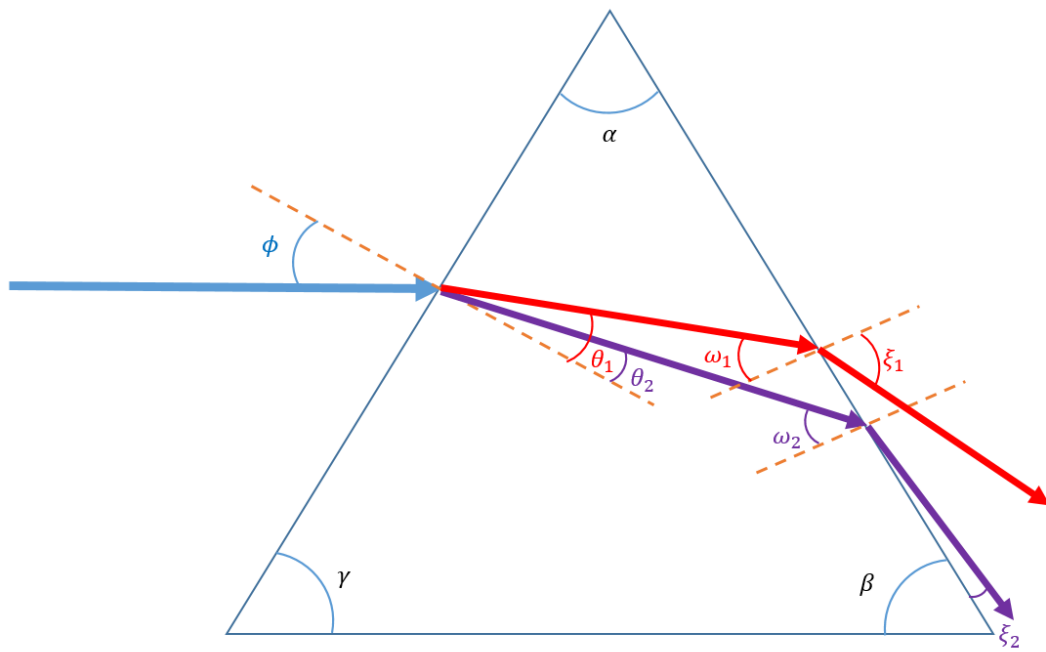


Figure 5: Trajectoires globales avec seulement les valeurs pertinentes

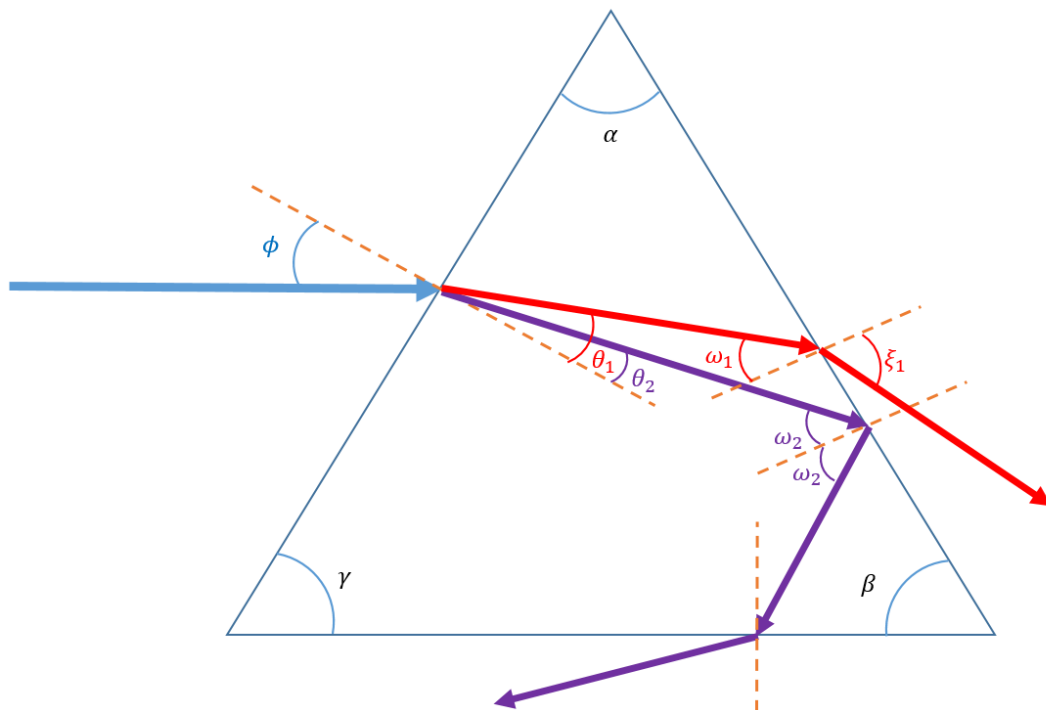


Figure 6: Réflexion Totale Interne (RTI) et séparation des couleurs

## 4.5 Quelques chiffres

Considérons un prisme équilatéral, pour lequel  $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$ . Si le prisme est fait d'un certain type de verre, pour lequel  $n_1 = n_{\text{verre, rouge}} = 1.45831$  et  $n_2 = n_{\text{verre, violet}} = 1.46925$ , alors

$$\phi_{c,1} \approx 24.79^\circ$$

et

$$\phi_{c,2} \approx 25.61^\circ.$$

Il est donc possible de séparer les couleurs si l'angle initial  $\phi$  est entre  $24.79^\circ$  et  $25.61^\circ$ . Cet intervalle n'est pas énorme. En dessous de  $24.79^\circ$ , les deux rayons sortiraient par la même face, soit celle opposée à l'angle  $\gamma$ . Au contraire, si l'angle est plus grand que  $25.61^\circ$ , alors les deux rayons subiront une réflexion totale interne à cet interface.

## 5 Discussion

Plusieurs aspects de cette exercice valent la peine d'être soulevés. En premier lieu et de façon évidente, il est possible de déterminer une plage d'angle d'incidence pour lesquels il sera possible de séparer le faisceau initial en plusieurs nouveaux faisceaux. Évidemment, chacun de ces faisceaux sera moins énergétique que le faisceau initial, de par la conservation d'énergie.

En deuxième lieu, si le faisceau n'est pas fragmenté, c'est-à-dire si son entièreté sort par la même face du prisme, il sera possible de l'étendre en le projetant sur une surface. En effet, puisque les deux rayons sortant ne seront pas parallèles ( $\xi_1 \neq \xi_2$ ), en éloignant un écran, il sera possible d'augmenter l'effet de la dispersion. Il faudra cependant ne pas trop s'éloigner, sinon l'intensité diminuera trop et il ne sera plus possible de bien voir la dispersion.

Dans le cas où la dispersion n'était pas faite avec un prisme, mais avec une plaque d'une certaine épaisseur (comme l'exemple en classe), l'effet de la dispersion ne dépendait que de l'épaisseur de la plaque, alors qu'ici les dimensions du prisme n'ont même pas eu à être considérées.