PHY2300 Physique médicale
Hiver 2024
Examen de Pratique Intra

Mise en Contexte

Ceci est un examen formatif pour le cours PHY2300 : Physique Médicale, de l'Université de Montréal, pour l'hiver 2024.
Les questions de ce document permettront à l'étudiant de se préparer pour l'examen. Le format et la longueur seront similaires à l'examen lui-même.

1 Questions

1. Soit la fonction triangulaire simple :

$$t(x) = \begin{cases} \dfrac{2\,(x-a)}{(b-a)^2} & \text{, si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{, sinon} \end{cases} \tag{1}$$

   (a) Confirmez que $t(x)$ est une pdf.

   (b) Trouvez la moyenne de $t(x)$, i.e. calculez $\mathbb{E}[x]$.

(c) Représentez graphiquement vos résultats, avec $a = 0$, $b = 10$. Est-ce que la réponse en (b) est raisonnable ? Justifiez en quelques mots.

2. La transformée de Fourier de la fonction $f(x) = e^{-\pi x^2}$, où b est une constante réelle non-nulle, est
$$F(k) = e^{-\pi k^2}. \tag{2}$$
En considérant cette information (ou pas, à votre guise), quelle est la transformée de Fourier de
$$h(x, y) = e^{-\pi(3x^2+7y^2)}?$$

3. En utilisant la loi de Beer-Lambert, déterminez une équation reliant le coefficient d'atténuation μ et l'épaisseur pour laquelle le faisceau ne gardera que la moitié de son intensité.

4. Soit le graphique de donnée XCOM suivant : En haut à gauche, vous remarquerez une ellipse sur la courbe représentant le coefficient d'atténuation linéaire massique (μ/ρ) pour l'effet photoélectrique.
Expliquez brièvement la présence de la discontinuité.

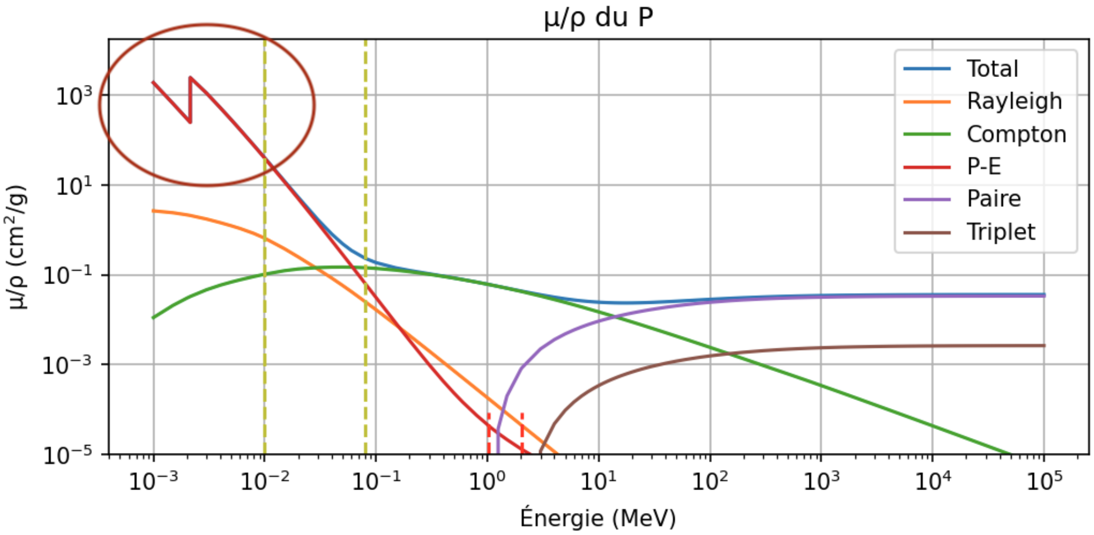

FIGURE 1 – Données XCOM pour le phosphore

5. Le terme convolution est utilisé pour décrire l'opération suivante entre deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$:

$$f(x) \star g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(y-x)dy. \tag{3}$$

Donnez un exemple d'application de la convolution en physique médicale.

6. **Bonus :**

Expliquez l'étymologie du terme «convolution».

7. Expliquez brièvement ce qui survient lorsqu'une image est convoluée avec un filtre passe-bas et un filtre passe-haut (indépendamment).

8. Décrivez brièvement le principe de rétro-projection (sans besoin d'équations).

9. Voici quelques fonctions dans l'espace spatial x, y et des transformées de Radon. Identifiez quel objet et quel sinogramme vont ensemble. Expliquez en quelques mots votre choix.
N.B. : Le centre de référence (x,y), (0,0) est au centre de l'image, là où il y a une croix. Le 0 pour l'axe des ξ est sur la ligne dans les sinogrammes. La projection est faite sur l'axe des x (horizontal).
N.B.A. : La référence pour chaque petite image se trouve au-dessus.

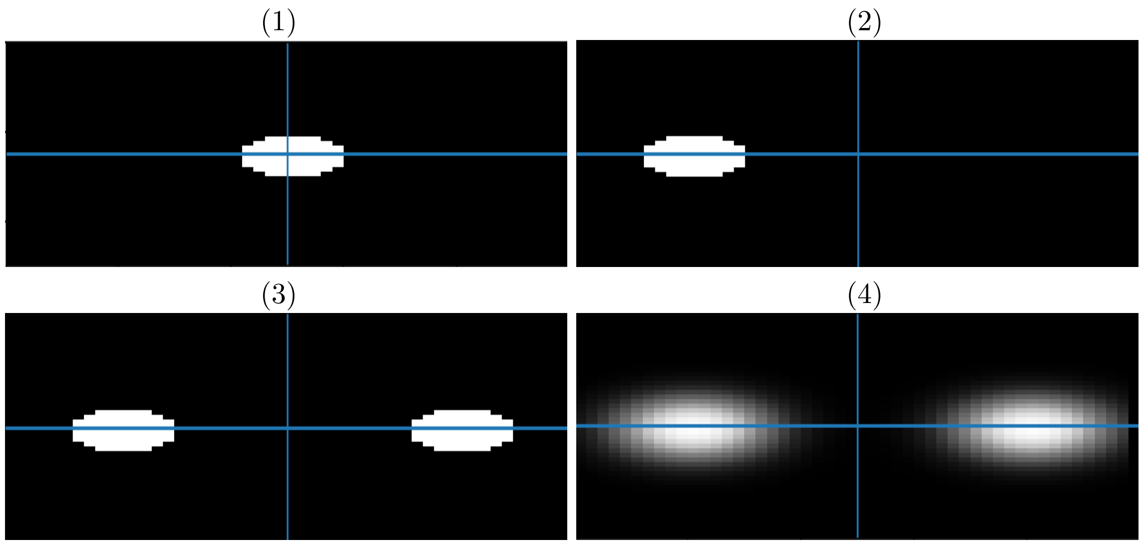

FIGURE 2 – Quelques fonctions dans l'espace x, y

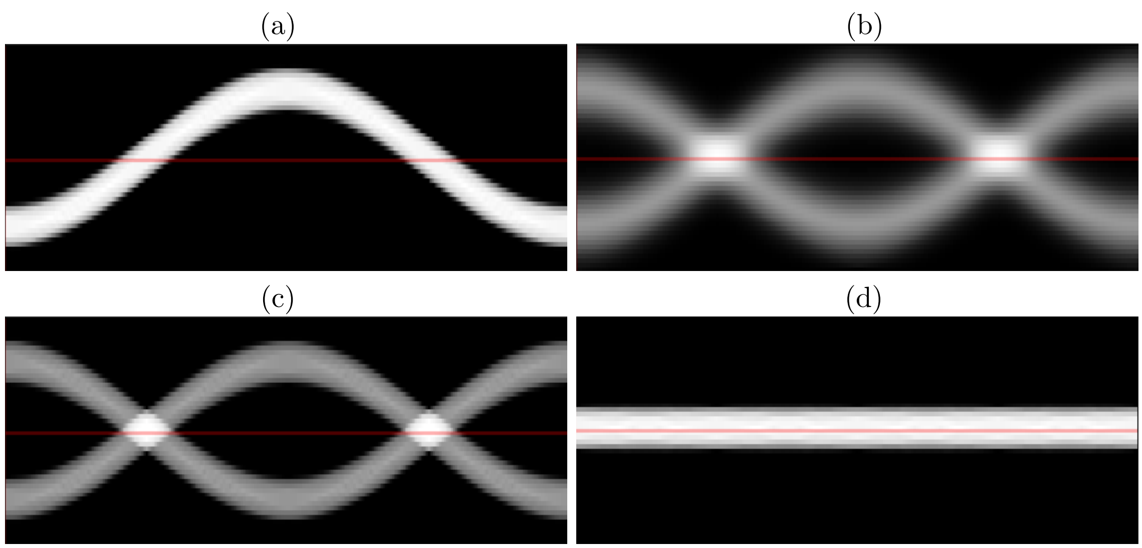

FIGURE 3 – Quelques sinogrammes dans l'espace ξ, θ

2 Équations Pertinentes

1.	Fonction de densité de probabilité (pdf)		$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
			$f(x) \geq 0$
2.	Espérance Mathématique		$\mathbb{E}[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$
3.	Moyenne		$\bar{x} = \mathbb{E}[x]$
4.	Variance		$s^2 = \mathbb{E}\left[(x-\bar{x})^2\right]$
4.1.	Variance 2		$s^2 = \mathbb{E}[x^2] - \bar{x}^2$
5.	Loi d'atténuation		$N(x) = N_0 e^{-\mu x} = N_0 e^{-\frac{\mu}{\rho}\rho x}$
6.	Effet Photo-Électrique : Cinématique		$E_{e^-} = h\nu - \phi = E_\gamma - \phi$
7.	Diffusion Compton : Cinématique		$h\nu' = E_{\gamma'} = \frac{h\nu}{1+\frac{h\nu}{m_e c^2}(1-\cos\theta)}$
			$T_{e^-} = h\nu\left[\frac{\frac{h\nu}{m_e c^2}(1-\cos\theta)}{1+\frac{h\nu}{m_e c^2}(1-\cos\theta)}\right]$
			$\theta = \arccos\left[1 - m_e c^2\left(\frac{h\nu - h\nu'}{h\nu h\nu'}\right)\right]$
			$\text{cotan}\alpha = \left(1+\frac{h\nu}{m_e c^2}\right)\tan(\theta/2)$
8.	Sections Efficaces	P-E	$\sigma_{a,PE}(E,Z) \approx f_{PE}(E)Z^m$
		P-E (Sauter)	$\sigma_{a,PE}(E,Z) \approx f_{PE}(E)Z^5$
		Rayleigh	$\sigma_{a,R}(E,Z) \approx f_{PE}(E)Z^2$
		Compton	$\sigma_{a,C}(E,Z) \approx f_{PE}(E)Z^1$
		PP	$\sigma_{a,PP}(E,Z) \approx f_{PE}(E)Z^2$
9.	Convolution		$f(x) \star g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\mathrm{d}t$
10.	Transformée de Fourier 1D	Directe	$\mathcal{F}[f(x)]_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi kx}\mathrm{d}x$
		Inverse	$\mathcal{F}^{-1}[F(k)]_x = \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{i2\pi kx}\mathrm{d}k$
11.	Théorème de Convolution		$\mathcal{F}\left[f(x)\star g(x)\right] = \mathcal{F}[f(x)]\cdot\mathcal{F}[g(x)]$
12.	Propriétés de la Transformée de Fourier	Linéarité	$\mathcal{F}\left[\alpha f(x) + \beta g(x)\right] = \alpha\mathcal{F}[f(x)] + \beta\mathcal{F}[g(x)]$
		Décalage	$\mathcal{F}\left[f(x-x_0)\right] = e^{-i2\pi kx_0}\mathcal{F}[f(x)]$
		Échelle	$\mathcal{F}\left[f(ax)\right] = \frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{k}{a}\right)$
		Dérivée	$\mathcal{F}\left[f^{(n)}(x)\right] = (i2\pi k)^n\,\mathcal{F}[f(x)]$
		Séparabilité	$\mathcal{F}\left[f(x)g(y)\right] = \mathcal{F}[f(x)]_\nu\mathcal{F}[g(y)]_\mu$
13.	Rotation d'axes	x	$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$
		y	$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$
13.	Transformée de Radon	1 point	$\mathcal{R}f(\xi,\theta) = \delta\left(\xi - [x_0\cos\theta + y_0\sin\theta]\right)$
		Générale	$\mathcal{R}f(\xi,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta\left(\xi - [x_0\cos\theta + y_0\sin\theta]\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
14.	Théorème de la Coupe Centrale		$f(x,y) = \int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi(kx\cos\theta + ky\sin\theta)}\lvert k\rvert\mathcal{F}\left[p_\theta(\xi)\right]_k\mathrm{d}k\mathrm{d}\theta$