

EXAMEN INTRA

DATE : 19 février 2024

EXAMEN FINAL

HEURE : 8h30-10h20

EXAMEN DIFFÉRÉ

SALLE : MIL-B-2416

DIRECTIVES PÉDAGOGIQUES : calculatrice programmable

calc. non-prog.

docu. permise (1 page recto-verso)

docu. non-permise

examen imprimé recto-verso

L'examen est sur 25 (+1) points et compte pour 25% de la note finale

Répondez à **TOUTES LES QUESTIONS** et choisissez la **meilleure** réponse ou les **meilleures** réponses dans le cas où plusieurs choix sont spécifiés.

La dernière page du document contient des informations et formules utiles. Vous pouvez vous en servir dans n'importe quel énoncé, sauf sous mention explicite contraire. Idéalement, veuillez indiquer quelle formule vous utilisez et dans quel contexte, le cas échéant.

Veuillez répondre aux questions **directement dans le document**, dans les espaces alloués. Au besoin, vous pouvez utiliser le recto d'une feuille, en indiquant clairement à quelle question vous répondez.

Question	Sous-Question	Pts	Pts Obtenus	Question	Sous-Question	Pts	Pts Obtenus
1.		5		4.		3	
	a)	1		5.		2	
	b)	2		6.		B1	
	c)	2		7.		3	
2.		3		8.		3	
3.		2		9.		4	

1 Questions

1. Soit la fonction triangulaire simple :

$$t(x) = \begin{cases} \frac{2(b-x)}{(b-a)^2} & , \text{ si } x \in [a, b] \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases} \quad (1)$$

1.a) Confirmez que $t(x)$ est une pdf. [1 pt]

1 pt pour la démarche.
Pour tout x , $t(x) \geq 0$.
Ensuite,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} t(x) dx &= \frac{2}{(b-a)^2} \int_a^b (b-x) dx \\ &= \frac{2}{(b-a)^2} \left(bx - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_a^b \\ &= \frac{2}{(b-a)^2} \left[\left(b^2 - \frac{b^2}{2} \right) - \left(ab - \frac{a^2}{2} \right) \right] \\ &= \frac{2}{(b-a)^2} \left[\frac{b^2}{2} - ab + \frac{a^2}{2} \right] \\ &= \frac{2}{(b-a)^2} \frac{1}{2} (b^2 - 2ab + a^2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Le tout est normalisé. La fonction est donc une pdf.

1.b) Trouvez la moyenne de $t(x)$, i.e. calculez $\mathbb{E}[x]$. [2 pts]

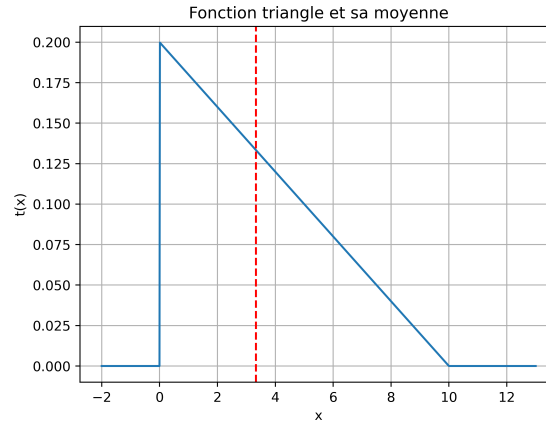
1 pt pour le calcul, 1 pt pour la réponse.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[x] &= \int_a^b xt(x)dx \\ &= \int_a^b x \frac{2(b-x)}{(b-a)^2} dx \\ &= \frac{2}{(b-a)^2} \int_a^b bx - x^2 dx \\ &= \frac{2}{(b-a)^2} \left[\frac{bx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right] \Big|_a^b \\ &= \frac{2}{(b-a)^2} \left[\frac{b^3}{2} - \frac{b^3}{3} - \frac{ba^2}{2} + \frac{a^3}{3} \right] \\ &= \frac{2}{(b-a)^2} \left[\frac{b^3 - 3a^2b + 2a^3}{6} \right]\end{aligned}$$

- 1.c) Représentez graphiquement vos résultats, avec $a = 0$, $b = 10$. Est-ce que la réponse en (b) est raisonnable? Justifiez en quelques mots. [2 pts]

1 pt pour la fonction, 1 pt pour la moyenne.

La moyenne est raisonnable, puisqu'elle tombe dans le triangle, mais plus près de la pointe élevée.



2. La transformée de Fourier de la fonction $f(x) = e^{-\pi x^2}$ est

$$F(k) = e^{-\pi k^2}. \quad (2)$$

En considérant cette information (ou pas, à votre guise), quelle est la transformée de Fourier de **[3 pts]**

$$g(x) = e^{-\pi(3x-2)^2}.$$

1 pt pour réécrire la fonction sous une forme simplifiée, 1 point pour le décalage, 1 pt pour le changement d'échelle.

Ici, il faut noter que $g(x) = f(3x - 2)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[g(x)] &= \mathcal{F}[f(3x - 2)] \\ &= e^{-i4\pi k} \mathcal{F}[f(3x)] && \text{(Par décalage spatial; eq 12 b)} \\ &= \frac{e^{-i4\pi k}}{|3|} F\left[\frac{k}{3}\right] && \text{(Par changement d'échelle; eq 12 c)} \\ &= \frac{e^{-i4\pi k}}{3} e^{-\pi\left(\frac{k}{3}\right)^2} \\ \mathcal{F}\left[e^{-\pi(3x-2)^2}\right] &= \frac{e^{-\pi\left(4ik + \frac{k^2}{9}\right)}}{3} \end{aligned}$$

3. Justifiez, sans grands calculs, pourquoi la production de paires ne peut pas survenir dans le vide (sans présence de matière ou de potentiels quelconques)? [**2 pts**]

1 pt pour la conservation d'énergie, 1 pt pour la conservation de quantité de mouvement.

Les conservations d'énergie et de quantité de mouvements ne peuvent pas être respectées en même temps. Cela implique que l'hypothèse de base, soit la production de paires dans le vide, ne peut survenir.

4. En utilisant la loi de Beer-Lambert, déterminez une équation reliant le coefficient d'atténuation μ et l'épaisseur pour laquelle le faisceau ne gardera que le 1/7ème de son intensité. [**3 pts**]

1 point pour le départ, 1 pt pour la démarche, 1 pt pour la réponse.

$$\begin{aligned}N_{1/7} &= N_0 e^{-\mu x_{1/7}} \\ \Rightarrow \frac{N_0}{7} &= N_0 e^{-\mu x_{1/7}} \\ \Rightarrow \frac{1}{7} &= e^{-\mu x_{1/7}} \\ \Rightarrow 7 &= e^{\mu x_{1/7}} \\ \Rightarrow \ln(7) &= \mu x_{1/7} \\ \Rightarrow \mu x_{1/7} &= \ln(7) \\ \Rightarrow x_{1/7} &= \frac{\ln(7)}{\mu}\end{aligned}$$

5. Le terme «Bremsstrahlung» est souvent utilisé en physique médicale. Expliquez brièvement de quoi il s'agit. [**2 pts**]

1 point pour le terme, 1 pt pour ce que cela représente et l'émission de photons. Bremsstrahlung signifie radiation de freinage et correspond à la radiation émise lorsque des électrons perdent de l'énergie cinétique dans un matériau. En ralentissant, ils émettent de la radiation sous forme de photons, dont l'énergie dépend de l'accélération.

6. Expliquez l'étymologie du terme «Bremsstrahlung». [**Bonus : 1 pt**]

1 pt pour le tout.

Le terme Bremsstrahlung vient de l'allemand, où les termes «der Bremse» (un frein, lui-même du verbe «bremsen») et «die Strahlung» (rayonnement, du verbe «strahlen») s'unissent pour signifier radiation de freinage, littéralement.

7. Décrivez qualitativement brièvement pourquoi la rétro-projection par elle-même (i.e. sans filtre $|k|$) ne fonctionne pas. Expliquez également pourquoi le filtre $|k|$ a un impact. [**3 pts**]

1 pt pour le flou ou la perte des détails. 1 pt pour l'explication du filtre. 1 pt pour le théorème.

La rétro-projection, employée seule, fait perdre les hautes fréquences de l'image reconstruite. L'exemple du cercle en classe illustre le fait que le contour devient flou et se perd.

Le filtre $|k|$, qui augmente la contribution des hautes fréquences au détriment des plus basses, permet de balancer cet effet. Il est aussi une conclusion naturelle du théorème de la coupe centrale.

8. Le phénomène de durcissement de faisceaux explique pourquoi, en imagerie par tomodensitométrie, les photons de plus basses énergies sont plus atténués que ceux avec une plus haute énergie. Au-delà des énergies pertinentes à la tomodensitométrie, est-ce que ce phénomène est toujours présent, pour toutes les énergies de photon ? Justifiez. [3 pts]

1 pt pour la réponse. 2 pts pour une explication.

Non.

Ce phénomène n'est présent que dans la région énergétique où le coefficient diminue avec l'énergie. Pour les énergies plus élevées, cette relation n'est pas toujours vraie. Par exemple, dans la région de 0.5 MeV, pertinente pour la médecine nucléaire, le coefficient μ/ρ est relativement constant. Il n'y aurait pas de durcissement de faisceau dans cette région.

9. Voici quelques fonctions dans l'espace spatial x, y et des transformées de Radon. Identifiez quel objet et quel sinogramme vont ensemble. Expliquez en quelques mots votre choix.

N.B. : Le centre de référence (x,y) , $(0,0)$ est au centre de l'image, là où il y a une croix. Le 0 pour l'axe des ξ est sur la ligne dans les sinogrammes. La projection est faite sur l'axe des x (horizontal).

N.B.A. : La référence pour chaque petite image se trouve au-dessus. [4 pts]

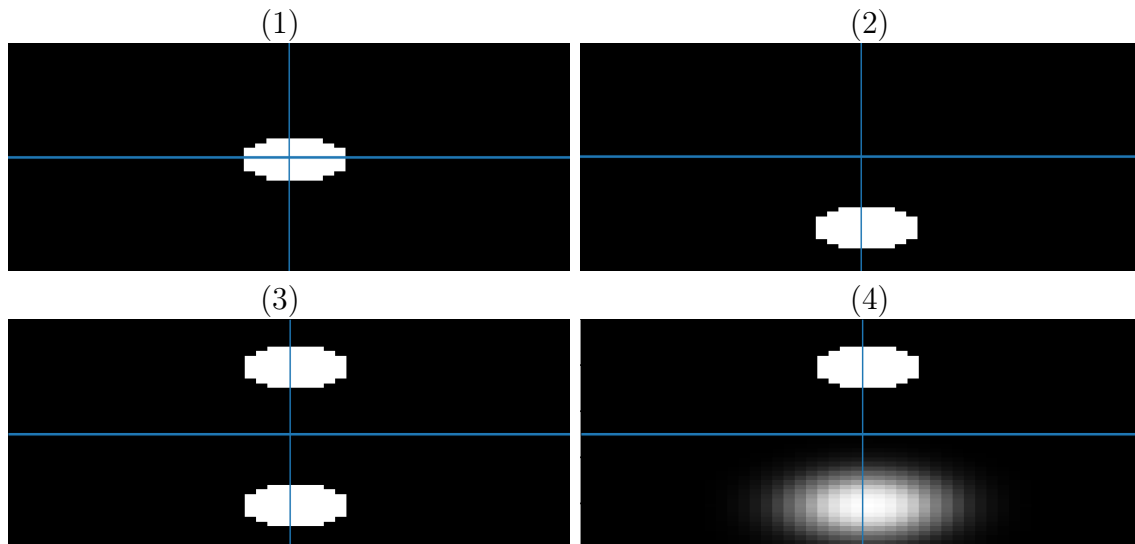


FIGURE 1 – Quelques fonctions dans l'espace x, y

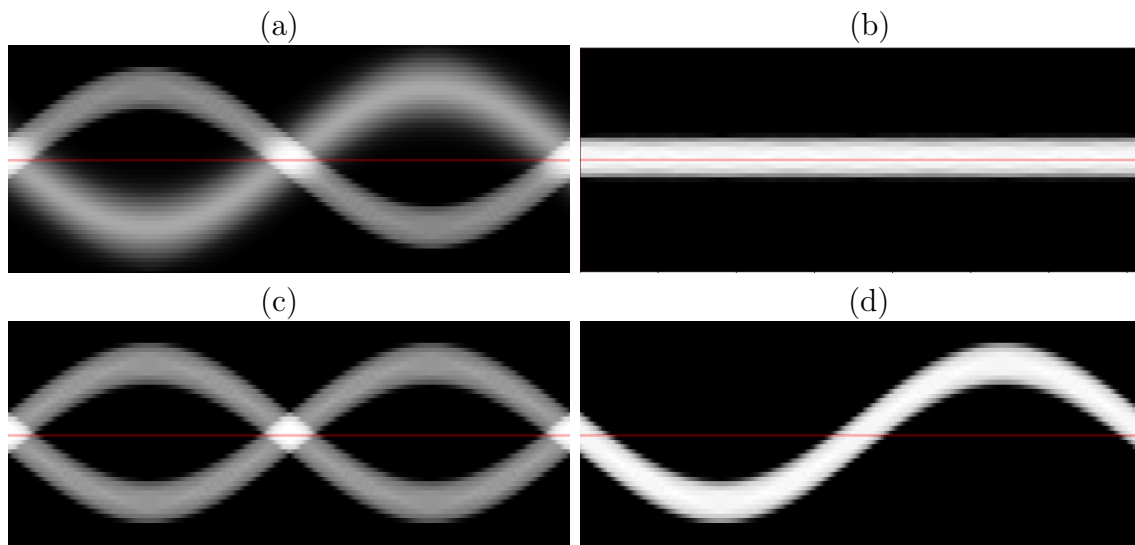


FIGURE 2 – Quelques sinogrammes dans l'espace ξ, θ

- 1 pt par paire correctement identifiée avec une explication adéquate.
- 1-b : Une seule forme centrée avec une symétrie circulaire.
- 2-d : Une seule forme non centrée avec une symétrie circulaire.
- 3-c : Deux formes identiques avec une portion délimitée.
- 4-a : Deux formes avec une floue et diffuse ; les deux formes ne sont pas identiques.

2 Équations Pertinentes

1.	Fonction de densité de probabilité (pdf)		$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
2.	Espérance Mathématique		$f(x) \geq 0$ $\mathbb{E}[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$
3.	Moyenne		$\bar{x} = \mathbb{E}[x]$
4.	Variance		$s^2 = \mathbb{E}[(x - \bar{x})^2]$
4.1.	Variance 2		$s^2 = \mathbb{E}[x^2] - \bar{x}^2$
5.	Loi d'atténuation		$N(x) = N_0 e^{-\mu x} = N_0 e^{-\frac{\mu}{\rho} \rho x}$
6.	Effet Photo-Électrique : Cinématique		$E_{e^-} = h\nu - \phi = E_{\gamma} - \phi$
7.	Diffusion Compton : Cinématique		$h\nu' = E_{\gamma'} = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)}$ $T_{e^-} = h\nu \left[\frac{\frac{h\nu}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)}{1 + \frac{h\nu}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)} \right]$ $\theta = \arccos \left[1 - m_e c^2 \left(\frac{h\nu - h\nu'}{h\nu h\nu'} \right) \right]$ $\cotan \alpha = \left(1 + \frac{h\nu}{m_e c^2} \right) \tan(\theta/2)$
8.	Sections Efficaces	P-E P-E (Sauter) Rayleigh Compton PP	$\sigma_{a,PE}(E, Z) \approx f_{PE}(E) Z^m$ $\sigma_{a,PE}(E, Z) \approx f_{PE}(E) Z^5$ $\sigma_{a,R}(E, Z) \approx f_{PE}(E) Z^2$ $\sigma_{a,C}(E, Z) \approx f_{PE}(E) Z^1$ $\sigma_{a,PP}(E, Z) \approx f_{PE}(E) Z^2$
9.	Convolution		$f(x) \star g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt$
10.	Transformée de Fourier 1D	Directe Inverse	$\mathcal{F}[f(x)]_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi kx} dx$ $\mathcal{F}^{-1}[F(k)]_x = \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{i2\pi kx} dk$
11.	Théorème de Convolution		$\mathcal{F}[f(x) \star g(x)] = \mathcal{F}[f(x)] \cdot \mathcal{F}[g(x)]$
12.	Propriétés de la Transformée de Fourier	Linéarité Décalage Échelle Dérivée Séparabilité	$\mathcal{F}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha \mathcal{F}[f(x)] + \beta \mathcal{F}[g(x)]$ $\mathcal{F}[f(x - x_0)] = e^{-i2\pi kx_0} \mathcal{F}[f(x)]$ $\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{ a } F\left(\frac{k}{a}\right)$ $\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = (i2\pi k)^n \mathcal{F}[f(x)]$ $\mathcal{F}[f(x)g(y)] = \mathcal{F}[f(x)]_{\nu} \mathcal{F}[g(y)]_{\mu}$
13.	Rotation d'axes	x y	$x' = x \cos \theta + y \sin \theta$ $y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$
13.	Transformée de Radon	1 point Générale	$\mathcal{R}f(\xi, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(\xi - [x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta]) dx dy$ $\mathcal{R}f(\xi, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(\xi - [x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta]) dx dy$
14.	Théorème de la Coupe Centrale		$f(x, y) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi(kx \cos \theta + ky \sin \theta)} k \mathcal{F}[p_{\theta}(\xi)]_k dk d\theta$

FACULTÉ DES ARTS ET DES SCIENCES – DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE
SIGLE DU COURS : PHY2300 NOM DU CHARGÉ DE COURS : Philippe Laporte
TITRE DU COURS : PHYSIQUE MÉDICALE

SIGNATURES:

LE CHARGÉ DE COURS _____

LE RÉPONDANT _____