

PHY2300 Physique médicale

Hiver 2024

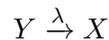
Devoir n°3

À remettre avant le mercredi 20 mars 2024 10 :30 a.m.

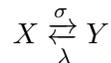
sur format physique ou en ligne.

Questions

- 1 [10 pts] Calculez la transformée de Radon d'un carré de côté L de densité constante. Supposez que le centre du carré est situé à l'origine et que ses côtés sont parallèles aux axes. Pour vous aidez, vous pouvez suivre les étapes suivantes :
- (a) Y-a-t'il une symmétrie pour le carré ? En d'autres mots, devons-nous calculer la projection pour tous les angles de 0 à π ou est-il possible d'arrêter avant ? [1 pts]
 - (b) Calculez la projection pour $\theta = 0$. [2 pts]
 - (c) Calculez la projection pour $\theta = \pi/4$ [2 pts]
 - (d) Calculez la projection pour $\theta \in [0, \pi/4]$ [2 pts]
 - (e) Grâce aux parties a-d, esquissez la transformée de Radon du carré [1 pts]
 - (f) Portez une attention aux points limites dans le sinogramme. Quelle trajectoire suivent-ils dans l'espace de Radon ? [1 pts] ;
 - (g) Pour un θ donné, est-ce que la transformée de Radon est toujours continue ? [1 pts]
- 2 [11 pts] Dans cet exemple, nous allons considérer la production d'un radioisotope. Considérons un élément Y , qui se désintègre radioactivement en un élément X , avec une constante de désintégration λ , selon le schème :



Supposons que nous ayons un moyen, en laboratoire, pour créer le radioisotope Y à partir du X . (En pratique, cela se fait au moyen d'un cyclotron, en bombardant un échantillon du produit X .) Ce processus pourrait avoir une constante de «création» σ . La réaction devient donc



Par simplicité, nous supposons que $\lambda \neq \sigma$.

- (a) Posez le système d'équations différentielles pertinentes pour cette situation. [1 pts]
- (b) Écrivez ce système d'équations différentielles sous forme matricielle. [1 pts]
- (c) Posez l'hypothèse $N = \xi e^{rt}$ et retrouvez l'équation caractéristique. [1 pts]
- (d) Trouvez les valeurs propres de ce système. [1 pts]
- (e) Trouvez les vecteurs propres pour chacune des valeurs propres. [1 pts]
- (f) En supposant le contexte initial de $N_X = N_0$ et $N_Y = 0$, trouvez les équations générales dirigeant ce système dynamique. [2 pts]
- (g) Calculez $N_X(t) + N_Y(t)$. Quel est le résultat ? Est-ce que ce résultat est raisonnable ? [1 pts]

- (h) Vers quelle valeur tend N_X lorsque $t \rightarrow \infty$? [1 pts]
 (i) Vers quelle valeur tend N_Y lorsque $t \rightarrow \infty$? [1 pts]
 (j) À la lumière de vos réponses en (h) et (i), quelle est l'importance du facteur σ ? Rappelez-vous que λ est fixe, puisqu'il dépend du radioisotope Y . En pratique, σ , comme son choix de symbole, est relié à la section efficace correspondant à la réaction de création du radioisotope. [1 pts]

- 3 [12 pts] Dans cet exercice, nous explorerons un scénario contrefactuel ; l'idée sera de considérer une alternative et de voir si les données probantes supportent cette notion ou pas. En classe, nous avons vu que l'équation différentielle régissant la désintégration radioactive était

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N. \quad (1)$$

Supposons que nous voulions considérer un scénario où la constante de désintégration était une fonction. Par simplicité, supposons que cette fonction soit $\Lambda(t) = \lambda_1 t + \lambda_0$. Dans ce contexte, l'équation 1 deviendrait

$$\frac{dN}{dt} = -\Lambda(t)N = -(\lambda_1 t + \lambda_0)N. \quad (2)$$

Cet exercice peut sembler tirer par les cheveux, mais il représente une façon de tester différentes hypothèses lorsque plusieurs théories sont en opposition. Un exemple est le test de la théorie MOND (MODified Newtonian Dynamics). Ici, nous utilisons un modèle jouet, mais le principe peut tenir.

Cet exercice est inspiré de Griffiths, *An Introduction to Electrodynamics, ch.2, #*.

- (a) Décrivez qualitativement le rôle de λ_1 . [1 pts]
Indice : Considérez individuellement les cas $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_1 < 0$. Pour vous aidez, vous pouvez les mettre en comparaison avec $\lambda_1 = 0$.
- (b) Déterminez la nouvelle équation $N(t)$, en supposant que $N(0) = N_0$. [2 pts]
Indice : Vous pouvez considérer que dN et dt agissent comme des variables (ne le dites pas aux mathématiciens).
- (c) Supposons que $\lambda_0 = 0$ et $\lambda_1 > 0$. Si, après un temps t_α , il ne restait que 50% des atomes initiaux, comment pourrions-nous réécrire la nouvelle demie-vie? [2 pts]
- (d) De la même façon (avec $\lambda_0 = 0$ et $\lambda_1 > 0$), quel serait le temps de dixième de vie t_β ? Donnez une réponse sous forme d'équation et sous forme numérique [2 pts]
- (e) Quel serait le ratio de t_α/t_β ? [1 pts]
- (f) En TP, nous avons vu que, dans le modèle standard, $t_{1/2}/t_{1/10} = \ln 2 / \ln 10 \approx 0.30103$. Les mesures modernes des temps de demie-vie et des temps de dixième de vie concordent aisément avec ces valeurs. Quel espoir cela laisse-t-il pour notre modèle alternatif (avec $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_0 = 0$)? [1 pts]
- (g) Refaites les questions (c) à (e), mais en considérant que $\lambda_0 > 0$ et $\lambda_1 > 0$ (i.e. sans négliger λ_0). [3 pts]
Indice 1 : Ne cherchez pas une réponse numérique pour le ratio : vous obtiendrez une équation.
Indice 2 : Ce numéro est beaucoup plus complexe que (c) à (e). Faites gaffe!
Indice 3 : Ne considérez que la solution avec un signe positif (+).

- (h) Si nous mesurons exactement 0.30103 pour le ratio des deux temps, pourrions-nous assurément rejeter l'hypothèse de $\Lambda(t)$ comme en (f) ? Pourquoi ? [1 pts]

Note : La réponse est, théoriquement, non. En pratique, nous utilisons le principe du rasoir d'Ockham, nous disant que, si deux modèles expliquent de façon équivalente le même phénomène, celui avec le moins d'hypothèses ou de prémisses (dans notre cas, de variables) sera privilégié, jusqu'à preuve du contraire.

Indice : Vous pouvez utiliser des méthodes numériques pour cette partie.

1. (a) Puisque le carré est symétrique avec une rotation de 90 degrés, il n'est nécessaire que de calculer le sinogramme entre 0 et $\pi/2$. Par la suite, le tout se répète.

Techniquement, nous pourrions même justifier que le tout est antisymétrique entre 45 et 90 degrés par rapport à 0 à 45 degrés.

- (b) Selon la figure 1, pour chaque position ξ dans le carré, la hauteur est de L . Le domaine va de $-L/2$ à $L/2$, sinon on est hors du carré.

$$\mathcal{R}f(\xi, \theta = 0) = \begin{cases} L & , \text{ si } |\xi| \leq L/2 \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases} \quad (3)$$

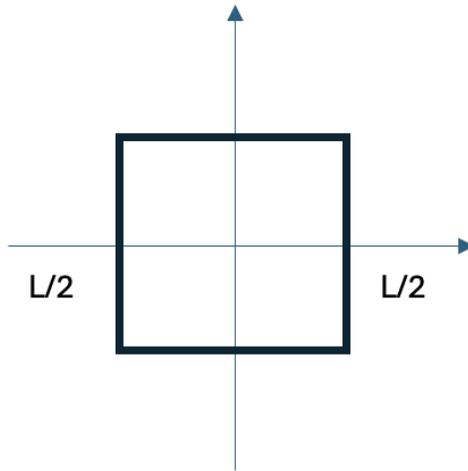


FIGURE 1 – Rotation de 0 degrés

- (c) De par mon erreur dans l'énoncé initial, si quelqu'un fait avec 90 degrés et a la même réponse qu'en (b), tout les points.

Le domaine va de $-L/\sqrt{2}$ à $L/\sqrt{2}$, sinon on est hors du carré. Selon la figure 2, pour chaque position ξ dans le carré, la hauteur est de $\sqrt{2}L - 2\xi$, car il s'agit d'un triangle équilatérale avec le côté du bas mesurant $\frac{L}{\sqrt{2}} - \xi$. La hauteur totale est donc le double.

$$\mathcal{R}f(\xi, \theta = \pi/4) = \begin{cases} \sqrt{2}L - 2\xi & , \text{ si } |\xi| \leq \frac{L}{\sqrt{2}} \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases} \quad (4)$$

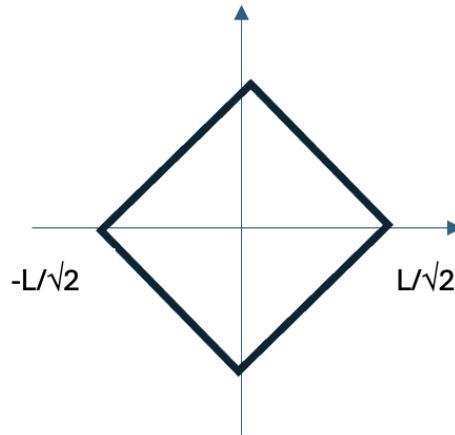


FIGURE 2 – Rotation de 45 degrés

- (d) La transformée est composée de trois parties, avec trois domaines : une des parties est extérieure et correspond à être hors du carré tourné. Avec une rotation du carré, chaque coin tourne. Hors du domaine signifie hors de la "portée" du coin du carré qui va le plus loin. Chaque coin peut être décrit comme ayant des coordonnées $(\pm L/2, \pm L/2)$. Grâce à la matrice de rotation (avec angle θ), cela implique que le coin le plus loin sera en $\xi = \frac{L}{2} (\cos \theta + \sin \theta)$ (point rose). Similairement, l'autre coin plus proche sera celui en $\xi = \frac{L}{2} (\cos \theta - \sin \theta)$ (point orange).

Pour tout $|\xi| \geq \frac{L}{2} (\cos \theta + \sin \theta)$, la transformée de Radon sera de 0.

Pour tout $|\xi| \leq \frac{L}{2} (\cos \theta - \sin \theta)$, la transformée de Radon sera constante, puisque les deux côtés opposés d'un carré sont parallèles. Pour cette partie centrale, il est possible de prendre le triangle le plus simple pour savoir la projection. Dans la figure, il s'agit du côté rouge. En regardant le côté à sa gauche (avec le sommet en rose), on peut voir un triangle rectangle. Le côté rouge est l'hypoténuse et le côté adjacent mesure L , alors la longueur rouge est de $\frac{L}{\cos \theta}$.

Pour la dernière partie du domaine, considérons la ligne verte. En séparant en deux

triangles avec la ligne rose, nous avons que le côté vert complet a la mesure

$$\begin{aligned}
 h &= h_1 + h_2 \\
 &= \frac{d}{\tan(\theta)} + \frac{d}{\tan(90 - \theta)} \\
 &= \frac{d}{\tan(\theta)} + \frac{d}{\cotan(\theta)} \\
 &= \frac{d \cos(\theta)}{\sin(\theta)} + \frac{d \sin(\theta)}{\cos(\theta)} \\
 &= \frac{d \cos^2(\theta)}{\sin(\theta) \cos(\theta)} + \frac{d \sin^2(\theta)}{\sin(\theta) \cos(\theta)} \\
 &= \frac{d \cos^2(\theta) + d \sin^2(\theta)}{\sin(\theta) \cos(\theta)} \\
 &= \frac{d}{\sin(\theta) \cos(\theta)}
 \end{aligned}$$

Mais le côté d correspond à la longueur totale de la projection du point rose, moins la position actuelle ξ

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{L}{2} (\cos \theta + \sin \theta) - \xi}{\sin(\theta) \cos(\theta)} \\
 &= \frac{L (\cos \theta + \sin \theta) - 2\xi}{2 \sin(\theta) \cos(\theta)}
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{R}f(\xi, \theta = \pi/4) = \begin{cases} \frac{L}{\cos \theta} & , \text{ si } |\xi| \leq \frac{L}{2}(\cos \theta - \sin \theta) \\ \frac{L (\cos \theta + \sin \theta) - 2\xi}{2 \sin(\theta) \cos(\theta)} & , \text{ si } \frac{L}{2}(\cos \theta - \sin \theta) < |\xi| < \frac{L}{2}(\cos \theta + \sin \theta) \\ 0 & , \text{ si } |\xi| \geq \frac{L}{2}(\cos \theta + \sin \theta) \end{cases} \quad (5)$$

Malgré le risque de division par 0, cela n'arrive que si $\theta = 0$ et, à ce moment, la partie centrale du domaine disparaît. ($\cos 0 = 1$ et on retrouve la solution en (b).)

Dans le cas $\theta = \pi/4$, $\sin \theta = \cos \theta = \sqrt{2}/2$. La première partie du domaine disparaît et la deuxième réduit à $\sqrt{2}L - 2\xi$, la solution en (c).

- (e) Grâce à STEM-VIEW :
- (f) Les points suivent un sinogramme, mais modifié. Cela vient de l'épaisseur du carré.
- (g) La transformée de Radon n'est pas toujours continue. Pour $\theta = 0$, la TF est une fonction carré, qui n'est pas continue au bord. Pour tous les autres θ , la transformée est continue.

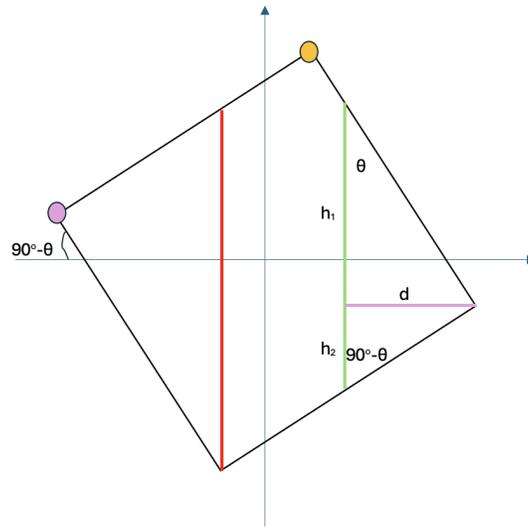


FIGURE 3 – Rotation de θ (1d)

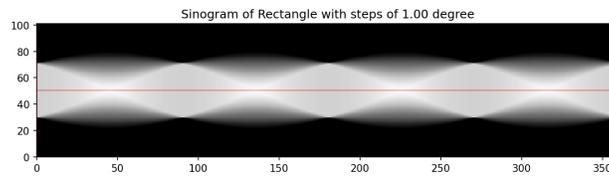


FIGURE 4 – Sinogramme d'un carré (1e)

2. (a)

$$\frac{dN_X}{dt} = -\sigma N_X + \lambda N_Y$$

$$\frac{dN_Y}{dt} = +\sigma N_X - \lambda N_Y$$

(b)

$$\begin{bmatrix} N'_X \\ N'_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \lambda \\ \sigma & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_X \\ N_Y \end{bmatrix}$$

$$N' = AN$$

(c) En supposant que $N = \xi e^{rt}$, nous avons $N' = r\xi e^{rt}$.

Alors,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow N' = AN \\ &\Rightarrow r\xi e^{rt} = A\xi e^{rt} \\ &\Rightarrow r\xi = A\xi \\ &\Rightarrow A\xi - r\xi = 0 \\ &\Rightarrow A\xi - r\mathbf{I}\xi = 0 \\ &\Rightarrow (A - r\mathbf{I})\xi = 0 \\ &\Rightarrow \det(A - r\mathbf{I}) = 0 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -\sigma - r & \lambda \\ \sigma & -\lambda - r \end{vmatrix} &= (-\sigma - r)(-\lambda - r) - \lambda\sigma \\ &= (\sigma + r)(\lambda + r) - \lambda\sigma \\ &= (r^2 + r\lambda + r\sigma + \lambda\sigma) - \lambda\sigma \\ &= r^2 + r\lambda + r\sigma \\ &= r(r + \lambda + \sigma) \\ &= 0 \\ &\Rightarrow r \in \{0, -(\lambda + \sigma)\} \end{aligned}$$

(e) Si $r = 0$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\sigma - 0 & \lambda \\ \sigma & -\lambda - 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\sigma X + \lambda Y \\ \sigma X - \lambda Y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \begin{cases} -\sigma X + \lambda Y = 0 \\ \sigma X - \lambda Y = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} X = \frac{\lambda}{\sigma} Y \\ X = \frac{\lambda}{\sigma} Y \end{cases} \end{aligned}$$

Le vecteur propre a donc la forme

$$N_1(t) = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \sigma \end{bmatrix} e^{0t} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \sigma \end{bmatrix}$$

Si $r = -(\lambda + \sigma)$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\sigma - -(\lambda + \sigma) & \lambda \\ \sigma & -\lambda - -(\lambda + \sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda & \lambda \\ \sigma & \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda X + \lambda Y \\ \sigma X + \sigma Y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda X + \lambda Y &= 0 \\ \sigma X + \sigma Y &= 0 \\ \Rightarrow X &= -Y \\ \Rightarrow X &= -Y \end{aligned}$$

Le vecteur propre a donc la forme

$$N_2(t) = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-(\lambda+\sigma)t}$$

(f) Avec la condition initiale $N_X = N_0$ et $N_Y = 0$,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N_0 \\ 0 \end{bmatrix} &= N_1(0) + N_2(0) \\ &= \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \sigma \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \alpha &= \frac{N_0 \sigma}{\sigma + \lambda} \\ \beta &= \frac{N_0 \lambda}{\sigma + \lambda} \end{aligned}$$

La solution générale est donc

$$\begin{aligned} N_X(t) &= \frac{N_0}{\sigma + \lambda} (\sigma + \lambda e^{-(\lambda+\sigma)t}) \\ N_Y(t) &= \frac{N_0 \lambda}{\sigma + \lambda} (1 - e^{-(\lambda+\sigma)t}) \end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned} N_X + N_Y &= \frac{N_0}{\sigma + \lambda} (\sigma + \lambda e^{-(\lambda+\sigma)t}) + \frac{N_0 \lambda}{\sigma + \lambda} (1 - e^{-(\lambda+\sigma)t}) \\ &= \frac{N_0}{\sigma + \lambda} (\sigma + \lambda e^{-(\lambda+\sigma)t} + \lambda - \lambda e^{-(\lambda+\sigma)t}) \\ &= \frac{N_0}{\sigma + \lambda} (\sigma + \lambda) \\ &= N_0 \end{aligned}$$

Ce résultat est raisonnable, parce qu'il y a une conservation du nombre total de particules.

(h)

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} N_X(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_0}{\sigma + \lambda} \left(\sigma + \lambda e^{-(\lambda + \sigma)t} \right) \\ &= \frac{N_0}{\sigma + \lambda} (\sigma) \\ &= \frac{N_0 \sigma}{\sigma + \lambda}\end{aligned}$$

(i)

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} N_Y(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_0}{\sigma + \lambda} \left(\sigma + \lambda e^{-(\lambda + \sigma)t} \right) \\ &= \frac{N_0}{\sigma + \lambda} (\sigma) \\ &= \frac{N_0 \sigma}{\sigma + \lambda}\end{aligned}$$

(j) Plus le facteur σ sera élevé, plus il sera possible d'avoir de radioisotope Y lors de la saturation du système. Si σ est trop faible, il ne sera pas possible de créer de quantités appréciables de Y .

3. (a) λ_1 peut être vu comme un facteur temporel affectant la désintégration. S'il est positif, il représente le fait que les particules auront une plus grande tendance à se désintégrer si elles ont existé pendant un long moment. Au contraire, une valeur négative impliquera que les particules existant depuis longtemps ont une meilleure chance de survie.

(b) 1 pt pour l'intégration, 1 pt pour la constante.

$$\begin{aligned}\frac{dN}{N} &= -(\lambda_1 t + \lambda_0) dt \\ \int \frac{dN}{N} &= \int -(\lambda_1 t + \lambda_0) dt \\ \ln |N| &= -\left(\lambda_1 \frac{t^2}{2} + \lambda_0 t\right) + C \\ N &= e^{-(\lambda_1 \frac{t^2}{2} + \lambda_0 t) + C} \\ N(t) &= \hat{C} e^{-(\lambda_1 \frac{t^2}{2} + \lambda_0 t)} \\ \Rightarrow N(0) &= N_0 = \hat{C} \\ \Rightarrow N(t) &= N_0 e^{-(\lambda_1 \frac{t^2}{2} + \lambda_0 t)}\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}N(t_\alpha) &= \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda_1 \frac{t_\alpha^2}{2}} \\ \Rightarrow e^{\lambda_1 \frac{t_\alpha^2}{2}} &= 2 \\ \Rightarrow \lambda_1 \frac{t_\alpha^2}{2} &= \ln 2 \\ \Rightarrow t_\alpha^2 &= \frac{2 \ln 2}{\lambda_1} \\ \Rightarrow t_\alpha^2 &= \frac{\ln 4}{\lambda_1} \\ \Rightarrow t_\alpha &= \sqrt{\frac{\ln 4}{\lambda_1}}\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}N(t_\beta) &= \frac{N_0}{10} = N_0 e^{-\lambda_1 \frac{t_\beta^2}{2}} \\ \Rightarrow e^{\lambda_1 \frac{t_\beta^2}{2}} &= 10 \\ \Rightarrow \lambda_1 \frac{t_\beta^2}{2} &= \ln 10 \\ \Rightarrow t_\beta^2 &= \frac{2 \ln 10}{\lambda_1} \\ \Rightarrow t_\beta^2 &= \frac{\ln 100}{\lambda_1} \\ \Rightarrow t_\beta &= \sqrt{\frac{\ln 100}{\lambda_1}}\end{aligned}$$

(e) $t_\alpha/t_\beta = \sqrt{\frac{\ln 4}{\ln 100}} \approx 0.54866$

(f) Aucune. Cette hypothèse ne concorde pas avec les mesures expérimentales.

(g)

$$\begin{aligned}N(t_\gamma) &= \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-(\lambda_1 \frac{t_\gamma^2}{2} + \lambda_0 t_\gamma)} \\ \Rightarrow e^{(\lambda_1 \frac{t_\gamma^2}{2} + \lambda_0 t_\gamma)} &= 2 \\ \Rightarrow \lambda_1 \frac{t_\gamma^2}{2} + \lambda_0 t_\gamma &= \ln 2 \\ \Rightarrow \lambda_1 \frac{t_\gamma^2}{2} + \lambda_0 t_\gamma - \ln 2 &= 0 \\ \Rightarrow t_\gamma &= \frac{-\lambda_0 \pm \sqrt{\lambda_0^2 + 2 \ln 2 \lambda_1}}{\lambda_1} \\ \Rightarrow t_\gamma &= \frac{-\lambda_0 + \sqrt{\lambda_0^2 + \ln 4 \lambda_1}}{\lambda_1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N(t_\delta) &= \frac{N_0}{10} = N_0 e^{-(\lambda_1 \frac{t_\delta^2}{2} + \lambda_0 t_\delta)} \\ \Rightarrow e^{(\lambda_1 \frac{t_\delta^2}{2} + \lambda_0 t_\delta)} &= 10 \\ \Rightarrow \lambda_1 \frac{t_\delta^2}{2} + \lambda_0 t_\delta &= \ln 10 \\ \Rightarrow \lambda_1 \frac{t_\delta^2}{2} + \lambda_0 t_\delta - \ln 10 &= 0 \\ \Rightarrow t_\delta &= \frac{-\lambda_0 \pm \sqrt{\lambda_0^2 + 2 \ln 10 \lambda_1}}{\lambda_1} \\ \Rightarrow t_\delta &= \frac{-\lambda_0 + \sqrt{\lambda_0^2 + \ln 100 \lambda_1}}{\lambda_1}\end{aligned}$$

$$\frac{t_\gamma}{t_\delta} = \frac{-\lambda_0 + \sqrt{\lambda_0^2 + \ln 4 \lambda_1}}{-\lambda_0 + \sqrt{\lambda_0^2 + \ln 100 \lambda_1}}$$

Grâce à des méthodes numériques, il est possible d'avoir

$$\lambda_1 \approx 1.78993 \cdot 10^{-8} \lambda_0,$$

tant que $\lambda_0 > 0$, ce qui a été supposé.

(h) En pratique, cela signifie que nous n'avons pas moyen, au travers seulement du ratio entre la demie et la dixième vie du radioisotope de discriminer entre les modèles.