PHY2300 Physique médicale
Hiver 2024
Devoir n°3
À remettre avant le mercredi 20 mars 2024 10 :30 a.m.
sur format physique ou en ligne.

Questions

1 [**10 pts**] Calculez la transformée de Radon d'un carré de côté L de densité constante. Supposez que le centre du carré est situé à l'origine et que ses côtés sont parallèles aux axes. Pour vous aidez, vous pouvez suivre les étapes suivantes :

(a) Y-a-t'il une symmétrie pour le carré ? En d'autres mots, devons-nous calculez la projection pour tous les angles de 0 à π ou est-il possible d'arrêter avant ? [**1 pts**]

(b) Calculez la projection pour $\theta = 0$. [**2 pts**]

(c) Calculez la projection pour $\theta = \pi/2$ [**2 pts**]

(d) Calculez la projection pour $\theta \in [0, \pi/2]$ [**2 pts**]

(e) Grâce aux parties a-d, esquissez la transformée de Radon du carré [**1 pts**]

(f) Portez une attention aux points limites dans le sinogramme. Quelle trajectoire suivent-ils dans l'espace de Radon ? [**1 pts**] ;

(g) Pour un θ donné, est-ce que la transformée de Radon est toujours continue ? [**1 pts**]

2 [**11 pts**] Dans cet exemple, nous allons considérer la production d'un radioisotope. Considérons un élément Y, qui se désintègre radioactivement en un élément X, avec une constante de désintégration λ, selon le schème :

$$Y \xrightarrow{\lambda} X$$

Supposons que nous ayons un moyen, en laboratoire, pour créer le radioisotope Y à partir du X. (En pratique, cela se fait au moyen d'un cyclotron, en bombardant un échantillon du produit X.) Ce processus pourrait avoir une constante de «création» σ. La réaction devient donc

$$X \underset{\lambda}{\overset{\sigma}{\rightleftarrows}} Y$$

Par simplicité, nous supposerons que $\lambda \neq \sigma$.

(a) Posez le système d'équations différentielles pertinentes pour cette situation. [**1 pts**]

(b) Écrivez ce système d'équations différentielles sous forme matricielle. [**1 pts**]

(c) Posez l'hypothèse $N = \xi e^{rt}$ et retrouvez l'équation caractéristique. [**1 pts**]

(d) Trouvez les valeurs propres de ce système. [**1 pts**]

(e) Trouvez les vecteurs propres pour chacune des valeurs propres. [**1 pts**]

(f) En supposant le contexte initial de $N_X = N_0$ et $N_Y = 0$, trouvez les équations générales dirigeant ce système dynamique. [**2 pts**]

(g) Calculez $N_X(t) + N_Y(t)$. Quel est le résultat ? Est-ce que ce résultat est raisonable ? [**1 pts**]

(h) Vers quelle valeur tend N_X lorsque $t \to \infty$? [**1 pts**]

(i) Vers quelle valeur tend N_Y lorsque $t \to \infty$? [**1 pts**]

(j) À la lumière de vos réponses en (h) et (i), quelle est l'importance du facteur σ ? Rapplez-vous que λ est fixe, puisqu'il dépend du radioisotope Y. En pratique, σ, comme son choix de symbole, est relié à la section efficace correspondant à la réaction de création du radioisotope. [**1 pts**]

3 [**12 pts**] Dans cet exercice, nous explorerons un scénario contrefactuel ; l'idée sera de considérer une alternative et de voir si les données probantes supportent cette notion ou pas.

En classe, nous avons vu que l'équation différentielle régissant la désintégration radioactive était

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N. \tag{1}$$

Supposons que nous voulions considérer un scénario où la constante de désintégration était une fonction. Par simplicité, supposons que cette fonction soit $\Lambda(t) = \lambda_1 t + \lambda_0$.

Dans ce contexte, l'équation 1 deviendrait

$$\frac{dN}{dt} = -\Lambda(t)N = -(\lambda_1 t + \lambda_0)N. \tag{2}$$

Cet exercice peut sembler tirer par les cheveux, mais il représente une façon de tester différentes hypothèses lorsque plusieurs théories sont en opposition. Un exemple est le test de la théorie MOND (MOdified Newtonian Dynamics). Ici, nous utilisons un modèle jouet, mais le principe peut tenir.

Cet exercice est inspiré de Griffiths, *An Introduction to Electrodynamics, ch.2, #.*

(a) Décrivez qualitativement le rôle de λ_1. [**1 pts**]
Indice : Considérez individuellement les cas $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_1 < 0$. Pour vous aidez, vous pouvez les mettre en comparaison avec $\lambda_1 = 0$.

(b) Déterminez la nouvelle équation $N(t)$, en supposant que $N(0) = N_0$. [**2 pts**]
Indice : Vous pouvez considérer que dN et dt agissent comme des variables (ne le dites pas aux mathématiciens).

(c) Supposons que $\lambda_0 = 0$ et $\lambda_1 > 0$. Si, après un temps t_α, il ne restait que 50% des atomes initiaux, comment pourrions-nous réécrire la nouvelle demie-vie ? [**2 pts**]

(d) De la même façon (avec $\lambda_0 = 0$ et $\lambda_1 > 0$), quel serait le temps de dixième de vie t_β ? Donnez une réponse sous forme d'équation et sous forme numérique [**2 pts**]

(e) Quel serait le ratio de t_α / t_β ? [**1 pts**]

(f) En TP, nous avions vu que, dans le modèle standard, $t_{1/2}/t_{1/10} = \ln 2 / \ln 10 \approx 0.30103$. Les mesures modernes des temps de demie-vie et des temps de dixième de vie concordent aisément avec ces valeurs. Quel espoir cela laisse-t-il pour notre modèle alternatif (avec $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_0 = 0$) ? [**1 pts**]

(g) Refaites les questions (c) à (e), mais en considérant que $\lambda_0 > 0$ et $\lambda_1 > 0$ (i.e. sans négliger λ_0). [**3 pts**]
Indice 1 : Ne cherchez pas une réponse numérique pour le ratio : vous obtiendrez une équation.
Indice 2 : Ce numéro est beaucoup plus complexe que (c) à (e). Faites gaffe !
Indice 3 : Ne considérez que la solution avec un signe positif (+).

(h) Si nous mesurions exactement 0.30103 pour le ratio des deux temps, pourrions-nous assurément rejeter l'hypothèse de $\Lambda(t)$ comme en (f) ? Pourquoi ? [**1 pts**]

Note : La réponse est, théoriquement, non. En pratique, nous utilisons le principe du rasoir d'Ockham, nous disant que, si deux modèles expliquent de façon équivalente le même phénomène, celui avec le moins d'hypothèses ou de prémisses (dans notre cas, de variables) sera privilégié, jusqu'à preuve du contraire.

Indice : Vous pouvez utiliser des méthodes numériques pour cette partie.