PHY2300 Physique médicale
Hiver 2024
Devoir n°2
À remettre avant le mercredi 07 février 2024 10 :30 a.m. sur format physique.

Questions

1. [**8pt**] En classe, la cinématique de la diffusion Compton a été explorée.
   Entre autres, il a été possible de voir que l'énergie du photon émis était donnée par

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{m_e c^2}(1 - \cos\theta)}, \tag{1}$$

   et que l'énergie cinétique de la particule était donnée par

$$T_e = h\nu \left[\frac{\frac{h\nu}{m_e c^2}(1 - \cos\theta)}{1 + \frac{h\nu}{m_e c^2}(1 - \cos\theta)} \right], \tag{2}$$

   où $h\nu$ est l'énergie du photon incident, m_e est la masse de l'électron, c est la vitesse de la lumière et θ est l'angle formé entre le photon émis et la trajectoire du photon incident, s'il n'avait pas été affecté par la diffusion Compton.
   De façon évidente,

$$h\nu = T_e + h\nu'.$$

   Au travers de cet exercice, nous déterminerons la relation entre l'angle d'émission de la particule (électron ou positron) α et du photon émis θ.
   Pour simplifier la tâche, nous supposerons que la particule est initialement au repos et libre, c'est-à-dire sans énergie de liaison.
   La réponse finale devra être

$$\text{cotan}(\alpha) = \left(1 + \frac{h\nu}{m_e c^2}\right) \tan(\theta/2) \tag{3}$$

   (a) Posez les équations pour la conservation d'énergie. [**1pt**]
   Indice : L'énergie pour une particule massive peut-elle être nulle ?

   (b) Posez les équations pour la conservation de quantité de mouvement. [**1pt**]
   Indice : Attention au système d'axes. Ils sont tous bons, mais certains sont plus judicieux que d'autres.

   (c) Grâce au principe de conservation de quantité de mouvement, joignez les bonnes équations de la partie précédente. Prenez une équation et divisez la par l'autre. [**1pt**]

   (d) Concluez en retrouvant l'équation 3. [**2pt**]
   Indice : Utilisez l'identité trigonométrique suivante : $\csc\theta - \text{cotan}\theta = \tan(\theta/2)$.

   (e) Quel est le domaine de l'équation 3 : en d'autres mots, quelles sont les valeurs que peut prendre θ ? [**1pt**]

(f) Un des cas extrêmes est lorsque $\theta = 0$. Dans ce cas, quel est α et quelle est l'énergie cinétique de la particule ? Est-ce que ces résultats sont qualitativement surprenant ? [**2pt**]

(a)

$$h\nu + m_e^2 c^4 = E_i = E_f = h\nu' + \sqrt{m_e^2 c^2 + p_1^2 c^4}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\frac{h\nu}{c} = p_{i,x} = p_{f,x} = p_1 \cos\alpha + \frac{h\nu'}{c}\cos\theta \\
0 = p_{i,y} = p_{f,y} = p_1 \sin\alpha - \frac{h\nu'}{c}\sin\theta \\
\Rightarrow p_1 \sin\alpha = \frac{h\nu'}{c}\sin\theta \\
\Rightarrow p_1 \cos\alpha = \frac{h\nu}{c} - \frac{h\nu'}{c}\cos\theta
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\frac{p_1\cos\alpha}{p_1\sin\alpha} &= \frac{\frac{h\nu}{c} - \frac{h\nu'}{c}\cos\theta}{\frac{h\nu'}{c}\sin\theta} \\
\text{cotan } \alpha &= \frac{h\nu}{h\nu'}\text{sec } \theta - \text{cotan } \theta
\end{aligned}$$

(d) 1 pt pour la démarche, 1 pt pour l'utilisation de l'identité.

$$\begin{aligned}
\text{cotan } \alpha &= \frac{h\nu}{h\nu'}\text{sec } \theta - \text{cotan } \theta \\
&= \frac{h\nu\left[1 + \frac{h\nu}{m_e c^2}(1-\cos\theta)\right]}{h\nu}\text{sec } \theta - \text{cotan } \theta \\
&= \text{sec } \theta + \frac{h\nu}{m_e c^2}\text{sec } \theta - \frac{h\nu}{m_e c^2}\text{sec } \theta\cos\theta - \text{cotan } \theta \\
&= \text{sec } \theta + \frac{h\nu}{m_e c^2}\text{sec } \theta - \frac{h\nu}{m_e c^2}\text{cotan } \theta - \text{cotan } \theta \\
&= \left(1 + \frac{h\nu}{m_e c^2}\right)(\text{sec } \theta - \text{cotan } \theta) \\
&= \left(1 + \frac{h\nu}{m_e c^2}\right)\tan(\theta/2)
\end{aligned}$$

(e) Comme dans le devoir précédent, θ varie entre 0 et π, par symétrie.

(f) 1 pt pour α, 1 pt pour le reste.
Lorsque $\theta = 0$, $\alpha = \pi/2$ et l'énergie est 0. Cela représente le frolement du photon sur la particule. À noter, le nouveau photon a la même énergie, donc il n'est pas possible de déplacer l'électron.

2. [**8pt**] En cours, nous avons vu que la production de paires ne pouvait pas se produire dans le vide, en prenant le moins d'éléments pour acquis.
Dans cet exercice, vous referez la démonstration, mais de façon plus simple.
Dans le but de créer une contradiction, considérons un photon incident, d'énergie $h\nu$, dans le vide. Supposons que deux particules soient créées, de masse identique (par exemple un électron et un positron ou un proton et un antiproton) grâce à ce photon, qui disparaîtra. Supposons que l'angle formé entre chaque particule émise et la trajectoire du photon incident soit de θ. (En classe, nous avions supposé que ces angles pouvaient être différents. Ici, nous supposerons qu'ils sont identiques. Cela rendra le tout beaucoup plus simple.) Utilisez les images suivantes, au besoin, pour vous guidez.

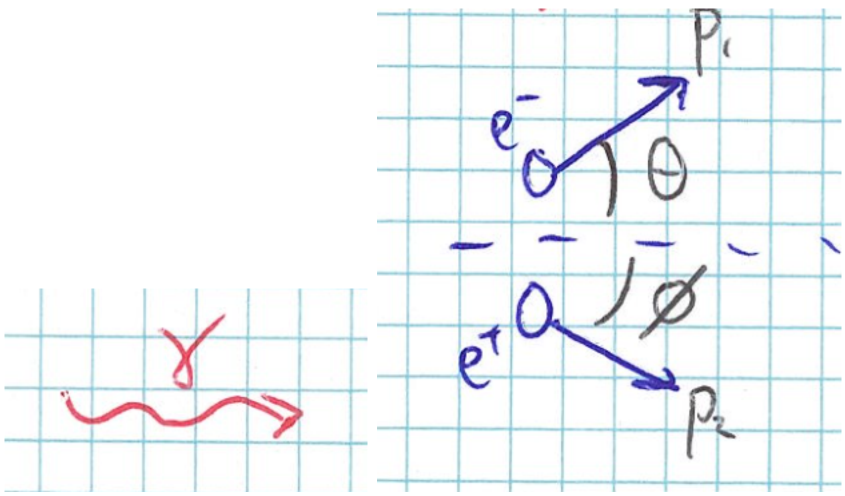

FIGURE 1 – Situations initiale et finale pour la question 1. Dans votre cas, $\phi = \theta$.

(a) Posez les équations pour la conservation d'énergie. [**1pt**]
Indice : L'énergie pour une particule massive peut-elle être nulle ?

(b) Posez les équations pour la conservation de quantité de mouvement. [**1pt**]
Indice : Attention au système d'axes. Ils sont tous bons, mais certains sont plus judicieux que d'autres.

(c) En utilisant les équations pour la quantité de mouvement, trouvez une expression pour $(h\nu)^2$. [**3pt**]

(d) En utilisant l'expression de $(h\nu)^2$ de la partie précédente avec la conservation d'énergie, trouvez une contradiction. [**3pt**]
Indice : Mettez l'énergie au carré et débarrassez-vous des racines carrées.

(a)

$$h\nu = E_i = E_f = \sqrt{m_e^2 c^4 + p_1^2 c^2} + \sqrt{m_e^2 c^4 + p_2^2 c^2}$$

(b)

$$\frac{h\nu}{c} = p_{i,x} = p_{f,x} = p_1 \cos\theta + p_2 \cos\theta$$

$$0 = p_{i,y} = p_{f,y} = p_1 \sin\theta - p_2 \sin\theta$$

(c) 1 pt pour trouver $p_1 = p_2$, 1 pt pour mettre en x et 1 pt pour la forme $(h\nu)^2$.
De l'équation en y, nous avons

$$p_1 \sin\theta = p_2 \sin\theta$$
$$p_1 = p_2$$

La partie en x peut donc être réécrite :

$$h\nu = 2cp_1 \cos\theta$$
$$\Rightarrow (h\nu)^2 = 4c^2 p_1^2 \cos^2\theta$$

(d) 1 pt pour mettre le tout au carré, 1 pt pour remplacer et trouver quand ça mène à 0, 1 pt pour la conclusion avec les inégalités.

$$\begin{aligned} h\nu &= \sqrt{m_e^2c^4 + p_1^2c^2} + \sqrt{m_e^2c^4 + p_2^2c^2} \\ &= 2\sqrt{m_e^2c^4 + p_1^2c^2} \\ (h\nu)^2 &= 4(m_e^2c^4 + p_1^2c^2) \\ 4c^2p_1^2\cos^2\theta &= 4m_e^2c^4 + 4p_1^2c^2 \\ \Rightarrow 0 &= 4m_e^2c^4 + 4p_1^2c^2(1 - cos^2\theta) \end{aligned}$$

Mais $(1 - \cos^2\theta) \geq 0$ et $m_e^2c^4 > 0$, donc

$$0 = 4m_e^2c^4 + 4p_1^2c^2(1 - \cos^2\theta) > 0,$$

ce qui est une contradiction, car nous aurions $0 > 0$.

3. [**11pt**] Les coefficients d'atténuation des différents types d'interactions photon-matière peuvent être estimées, pour une énergie de photon $h\nu$ donnée, grâce à une relation avec le numéro atomique Z.
Dans bien des cas, le matériau en question n'est pas constitué d'un seul élément, mais de plusieurs. Il arrive parfois aussi que nous connaissions le coefficient d'atténuation d'un matériau, mais pas directement des autres.
Dans cet exercice, nous aborderons une méthode pour contourner ce problème. Les données nécessaires se trouvent à la fin de l'énoncé du devoir.

(a) Il est possible d'utiliser un équivalent de la loi des mélanges, mais pour le numéro atomique :

$$Z_{eff} = \left[\frac{\sum_i w_i \frac{Z_i}{A_i} Z_i^m}{\sum_j w_j \frac{Z_j}{A_j}}\right]^{1/m}, \tag{4}$$

où w_k est la fraction de masse de l'élément k, A_k, sa masse atomique, et Z_k, son numéro atomique.
Utilisez la formule, avec $m = 4$, pour l'eau, le gras, le poumon, le muscle et l'os. Est-ce que les résultats sont raisonnables ? [**3pt**]

(b) Si un matériau est composé d'un seul élément, quel sera son numéro atomique effectif, Z_{eff} ? Est-ce que ce résultat est raisonnable ? [**1pt**]

(c) Calculez la densité électronique et atomique pour l'eau, le gras, le poumon, le muscle, l'os, l'aluminium, le cuivre et le plomb. [**2pt**]
Indice : Utilisez la loi des mélanges, comme vue dans le TP 1.

(d) Calculez la densité atomique relative à l'eau, pour l'eau, le gras, le poumon, le muscle, l'os, l'aluminium, le cuivre et le plomb. [**2pt**]
Indice : Utilisez la loi des mélanges, comme vue dans le TP 1.

(e) En supposant que $\mu_{eau} = 0.08939\text{cm}^{-1}$ à 600 keV, quel serait le coefficient d'atténuation de l'eau, du gras, du poumon, du muscle, l'os, l'aluminium, le cuivre et le plomb ? Supposons que la diffusion Compton soit l'effet dominant et soit vraiment plus présente que les autres. [**2pt**]
Indice : La diffusion Compton domine vraiment beaucoup beaucoup beaucoup... *wink, wink...*

(f) Est-ce que les résultats de la partie précédente sont concordants avec les valeurs XCOM ? Justifiez la différence, s'il y a lieu. [**1pt**]

(a) 1 pt pour la bonne utilisation de la formule, 1 pt pour avoir 2 bons résultats, 1 autre pt pour les 3 autres bons résultats.

(b) 1 pt pour le tout.
Si nous n'avons qu'un seul élément, $w_1 = 1$ et la somme n'a qu'un élément.
Alors,

$$Z_{eff} = \left[\frac{\sum_i w_i \frac{Z_i}{A_i} Z_i^m}{\sum_j w_j \frac{Z_j}{A_j}}\right]^{1/m} = \left[\frac{w_1 \frac{Z_1}{A_1} Z_1^m}{w_1 \frac{Z_1}{A_1}}\right]^{1/m} = (Z_1^m)^{1/m} = |Z_1| = Z_1.$$

Ce résultat dit simplement que le Z_{eff} pour un élément pur est le numéro atomique de l'élément. C'est le cas trivial.

(c) 1 pt pour atomique, 1 pt pour électronique.
Ici, on utilise $n_e = \rho N_A \sum_i w_i \frac{Z_i}{A_i}$ et $n_a = \rho N_A \sum_i \frac{w_i}{A_i}$.

(d) 1 pt pour la formule, 1 pt pour les résultats.
Ici, on utilise $\rho_i = n_{a,i}/n_{a,eau}$

(e) 1 pt pour l'équation simplifié, 1 pt pour les résultats.
De ce que nous avons vu en classe,

$$\mu_{tot}(E, Z) \approx \rho \frac{N_A}{A} \left[f_{PE}(E)Z^5 + f_R(E)Z^2 + f_C(E)Z + f_{PP}(E)Z^2\right].$$

Si Compton domine de beaucoup, le tout réduit à

$$\mu_{tot}(E, Z) \approx \rho \frac{N_A}{A} f_C(E)Z.$$

Il faut ici noter que f_C dépend de l'énergie, pas du Z. Il est donc constant pour différents matériaux.
En prenant un ratio,

$$\frac{\mu_{tot,i}}{\mu_{tot,eau}} \approx \rho_i \frac{Z_{eff,i}}{Z_{eff,eau}}.$$

Donc,

$$\mu_{tot,i} \approx \rho_i \mu_{tot,eau} \frac{Z_{eff,i}}{Z_{eff,eau}}.$$

4. [**3pt**] Prouvez que la convolution de deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ est commutative, c'est-à-dire que

$$f(x) \star g(x) = g(x) \star f(x), \tag{5}$$

où

$$f(x) \star g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt. \tag{6}$$

Indice : Ne cherchez pas trop loin, le tout peut se résumer en quelques lignes.
1 pt pour la définition, 1 pt pour le changement de variable, 1 pt pour la conclusion.

$$\begin{aligned}
f(x) \star g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt \\
&= \int_{\infty}^{-\infty} f(x-u)g(u)(-du) && \text{(Avec } u = x-t,\ du = -dt) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)g(u)du && \text{(En inversant les bornes)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(u)f(x-u)du \\
&= g(x) \star f(x)
\end{aligned}$$

5. [**15pt**] Dans cet exercice, nous allons testez le théorème de convolution, en utilisant la convolution directement et la transformée de Fourier, avant de comparer les résultats. Le théorème de la convolution stipule que

$$\mathbb{F}\left[f(x) \star g(x)\right] = \mathbb{F}\left[g(x)\right] \cdot \mathbb{F}\left[f(x)\right], \tag{7}$$

où $\mathbb{F}$ est l'opérateur de la transformée de Fourier, $\star$ est l'opération de convolution et $\cdot$ est la multiplication usuelle.
Pour cet exercice, nous prendrons que

$$f(x) = g(x) = r(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{, si } x \in [-a, a] \\ 0 & \text{, sinon} \end{cases} \tag{8}$$

Il s'agit ici d'une fonction rectangulaire.

(a) Calculez la convolution de $r(x) \star r(x)$. [**5pt**]
Indice : La difficulté de cette convolution est le domaine d'intégration et les bornes. *Achtung.*

(b) Calculez la transformée de Fourier de la partie précédente, soit $\mathbb{F}\left[r(x) \star r(x)\right]$. [**5pt**]

(c) Calculez la transformée de Fourier de la fonction rectangulaire, soit $\mathbb{F}[r(x)]$. [**3pt**]
N.B. : L'exponentielle peut et devra être réécrite après l'intégration : $e^{-i2\pi kx} = \cos(-2\pi kx) + i\sin(-2\pi kx)$. *P.S. :* $\frac{1}{i} = -i$.

(d) Calculez, grâce à la partie précédente $\mathbb{F}[r(x)] \cdot \mathbb{F}[r(x)]$. [**1pt**]

(e) Comparez les résultats de la partie (b) et (d). Commentez. [**1pt**]

(a) 2 pts pour les bornes d'intégration, 2 pts pour la bonne séparation en cas distincts, 1 pt pour la réponse. 2 pts boni si quelqu'un mentionne que le résultat est une pdf.

$$\begin{aligned}
r(x) \star r(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} r(y)r(x-y)dy \\
&= \begin{cases} 0 & \text{, si } x < -2a \\ \int_{-a}^{x+a} \frac{1}{4a^2} dy & \text{, si } -2a \leq x \leq 0 \\ \int_{x-a}^{a} \frac{1}{4a^2} & \text{, si } 0 \leq x \leq 2a \\ 0 & \text{, si } x > 2a \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{, si } x < -2a \\ \frac{2a+x}{4a^2} & \text{, si } -2a \leq x \leq 0 \\ \frac{2a-x}{4a^2} & \text{, si } 0 \leq x \leq 2a \\ 0 & \text{, si } x > 2a \end{cases}
\end{aligned}$$

Il s'agit ici d'une fonction triangulaire. À noter, il s'agit aussi d'une pdf.

(b)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{F}\left[r(x)\star r(x)\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} r(x)\star r(x) e^{-i2\pi kx} dx \\
&= \int_{-2a}^{0} \frac{2a+x}{4a^2} e^{-i2\pi kx} dx + \int_{0}^{2a} \frac{2a-x}{4a^2} e^{-i2\pi kx} dx \\
&= \left(\frac{(2a+x)}{4a^2} \frac{e^{-i2\pi kx}}{-i2\pi k} \right) \Big|_{-2a}^{0} - \frac{1}{4a^2} \left(\frac{1}{-2i\pi k} \right) \int_{-2a}^{0} e^{-i2\pi kx} dx \\
&\quad + \left(\frac{(2a-x)}{4a^2} \frac{e^{-i2\pi kx}}{-i2\pi k} \right) \Big|_{0}^{2a} - \frac{1}{4a^2} \left(\frac{1}{-2i\pi k} \right) \int_{0}^{2a} e^{-i2\pi kx} (-dx) \\
&= \frac{2a}{4a^2} \frac{i}{2\pi k} - \frac{1}{4a^2} \left(\frac{i}{2\pi k} \right) \left(\frac{i}{2\pi k} \right) e^{-i2\pi kx} \Big|_{-2a}^{0} \\
&\quad - \frac{2a}{4a^2} \frac{i}{2\pi k} + \frac{1}{4a^2} \left(\frac{i}{2\pi k} \right) \left(\frac{i}{2\pi k} \right) e^{-i2\pi kx} \Big|_{0}^{2a} \\
&= \frac{-1}{16a^2\pi^2k^2} \left[e^{i4\pi ka} - 1 - 1 + e^{-i4\pi ka} \right] \\
&= \frac{-1}{16a^2\pi^2k^2} \left[e^{i2\pi ka} - e^{-i2\pi ka} \right]^2 \\
&= \frac{-1}{16a^2\pi^2k^2} \left[i2\sin(2\pi ka) \right]^2 \\
&= \frac{4\sin(2\pi ka)}{16a^2\pi^2k^2} \\
&= \frac{\sin^2(2\pi ka)}{4\pi^2k^2a^2}
\end{aligned}
$$

(c) 1 pt pour l'intégration, 1 pour convertir e en trigo, 1 pt pour la réponse (pas obligé de se rendre ad sinc).

$$
\begin{aligned}
\mathbb{F}[r(x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} r(x) e^{-i2\pi kx} dx \\
&= \int_{-a}^{a} \frac{1}{2a} e^{-i2\pi kx} dx \\
&= \frac{1}{2a} \int_{a}^{a} e^{-i2\pi kx} dx \\
&= \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{-2i\pi k} \right) \left[e^{-i2\pi kx} \right] |_{-a}^{a} \\
&= \frac{i}{4a\pi k} \left[e^{-i2\pi ka} - e^{i2\pi ka} \right] \\
&= \frac{i}{4a\pi k} \left[\cos(-2\pi ka) + i \sin(-2\pi ka) - \cos(2\pi ka) - i \sin(2\pi ka) \right] \\
&= \frac{i}{4a\pi k} \left[-i2 \sin(2\pi ka) \right] \\
&= \frac{1}{2a\pi k} \left[\sin(2\pi ka) \right] \\
&= \frac{\sin(2\pi ka)}{2\pi ka} \\
&= \operatorname{sinc}(2\pi ka)
\end{aligned}
$$

(d) 1 pt pour le tout.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{F}[r(x)] \cdot \mathbb{F}[r(x)] &= \frac{\sin(2\pi ka)}{2\pi ka} \cdot \frac{\sin(2\pi ka)}{2\pi ka} \\
&= \frac{\sin^2(2\pi ka)}{4\pi^2 k^2 a^2}
\end{aligned}
$$

(e) 1 pt pour le tout.

$$
\mathbb{F}\left[r(x) \star r(x) \right] = \mathbb{F}[r(x)] \cdot \mathbb{F}[r(x)]
$$

Cela était prévisible, par le théorème de convolution.

Données Utiles

1. Tissus d'intérêt (% en fraction de masse et ρ à TPN)

Tissu	H (%)	C (%)	N (%)	O (%)	P (%)	Ca (%)	ρ (g/cm^3)
Eau	11	0	0	89	0	0	1.000
Gras	11	60	1	28	0	0	0.950
Poumon	10	11	4	75	0	0	0.230
Muscle	11	13	5	71	0	0	1.050
Os	7	29	4	44	5	11	1.920

2. Éléments (ρ à TPN)

Élément	H	C	N	O	Al	P	Ca	Cu	I	Pb
Z	1	6	7	8	13	15	20	29	53	82
A (g/mol)	1.008	12.011	14.007	15.999	26.982	30.974	40.078	63.546	126.90	207.2
ρ (g/cm^3)	-	-	-	-	2.7	-	-	8.9	-	11.3