PHY2300 Physique médicale
Hiver 2024
Devoir n°1
À remettre avant le 22 janvier 2024 8 :30 a.m. sur format physique.

Questions

1. [**11pt**] Considérons la p.d.f. pour une fonction triangulaire inversée, où c et d sont des constantes et où A est la constante de normalisation :

$$f(x) = \begin{cases} A|x-c|, \text{ si } x \in [c-d, c+d]. \\ 0, \text{ sinon} \end{cases} \tag{1}$$

   (a) Déterminer la constante de normalisation A. *Réponse :* $1/d^2$. [**3pt**]
   Indice 1 : Faites attention aux valeurs absolues lors du choix de domaine d'intégration.
   Indice 2 : Il y a plusieurs façons de se rendre à la réponse. Tant que vous y arrivez de façon convaincante, cela sera acceptable.

   (b) Esquissez le graphique de $f(x)$. [**1pt**]

   (c) Déterminez la moyenne de cette fonction. Est-ce que ce résultat est raisonnable ? Justifiez en quelques mots (pas lignes !). [**3pt**]

   (d) Déterminez la variance de cette fonction. Est-ce que ce résultat est raisonnable ? Justifiez en quelques mots (pas lignes !). [**3pt**]
   Indice : Il y a deux façons de trouver l'écart-type. Utilisez la formule de votre choix, mais soyez astucieux : la partie précédente peut résoudre la moitié du présent calcul.

   (e) Déterminez l'écart-type de cette fonction. [**1pt**]

   (a) Barème : 1pt pour intégrale égale à 1, 1 pt pour les bornes avec les valeurs absolues, 1 pt pour la réponse. Sinon, tous les points si fait de façon géométrique.
   Pour y arriver, il faut que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \\
&= \int_{c-d}^{c+d} A|x-c|dx \\
&= \int_{c-d}^{c} -A(x-c)dx + \int_{c}^{c+d} A(x-c)dx \\
&= -A\left[\frac{x^2}{2} - cx\right]_{c-d}^{c} + A\left[\frac{x^2}{2} - cx\right]_{c}^{c+d} \\
&= -A\left[\frac{c^2}{2} - c^2 - \left(\frac{c^2+d^2-2cd}{2}\right) + c(c-d)\right] + A\left[\left(\frac{c^2+d^2+2cd}{2}\right) - c(c+d) - \frac{c^2}{2} + c^2\right] \\
1 &= A\left[d^2\right]
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = 1/d^2$$

(b) 1pt pour la forme correcte. Deux triangles rectangles joints par leur pointe.

(c) 3 pts si fait de façon graphique adéquate.
Sinon, 1 pt pour l'énoncé, 1 pt pour la réponse (1/2 point si la valeur absolue est faite correctement), 1 pt pour la justification : fonction symétrique, moyenne au milieu.

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \mathbb{E}(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \\
&= \int_{c-d}^{c+d} x \frac{1}{d^2} |x-c| dx \\
&= \int_{c-d}^{c} -x \frac{1}{d^2} (x-c) dx + \int_{c}^{c+d} x \frac{1}{d^2} (x-c) dx \\
&= -\frac{1}{d^2} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{cx^2}{2} \right]_{c-d}^{c} + \frac{1}{d^2} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{cx^2}{2} \right]_{c}^{c+d} \\
&= -\frac{1}{d^2} \left[\frac{d^3}{3} - \frac{d^2 c}{2} \right] + \frac{1}{d^2} \left[\frac{d^3}{3} + \frac{cd^2}{2} \right] \\
&= c
\end{aligned}$$

La réponse était «évidente», puisque la fonction est symétrique autour du point centrale située à c (donc pas de dépendance en d). Aussi, c est le centre de la fonction et ne décrit pas sa largeur

(d) 2 façons de faire. Soit on utilise la définition, soit on prend le «théorème» :

$$s^2 = \mathbb{E}[(X - \bar{x})^2] = \mathbb{E}(x^2) - \bar{x}^2.$$

1 pt pour l'énoncé, 1 pt pour la réponse (1/2 point si la valeur absolue est faite correctement), 1 pt pour la justification.

En prenant la méthode 2, on commence par $\mathbb{E}(x^2)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(x^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx \\
&= \int_{c-d}^{c+d} x^2 \frac{1}{d^2}|x-c|dx \\
&= \int_{c-d}^{c} -x^2 \frac{1}{d^2}(x-c)dx + \int_{c}^{c+d} x^2 \frac{1}{d^2}(x-c)dx \\
&= -\frac{1}{d^2}\left[\frac{x^4}{4} - \frac{cx^3}{3}\right]_{c-d}^{c} + \frac{1}{d^2}\left[\frac{x^4}{4} - \frac{cx^3}{3}\right]_{c}^{c+d} \\
&= -\frac{1}{d^2}\left[-\frac{c^2d^2}{2} + \frac{2cd^3}{3} - \frac{d^4}{4}\right] + \frac{1}{d^2}\left[\frac{c^2d^2}{2} + \frac{2cd^3}{3} + \frac{d^4}{4}\right] \\
\mathbb{E}(x^2) &= c^2 + \frac{d^2}{2} \\
\Rightarrow s^2 &= \mathbb{E}(x^2) - \bar{x}^2 \\
&= \left(c^2 + \frac{d^2}{2}\right) - (c)^2 \\
&= \frac{d^2}{2}.
\end{aligned}$$

La réponse ne dépend pas de c, ce qui est raisonnable. De plus, plus d est grand, plus l'écart-type est grand.

(e) 1 pt pour la réponse. 1/2 pt bonus si valeur absolue.
L'écart-type est donné par la racine de la variance, soit

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{d^2}{2}} = \frac{|d|}{\sqrt{2}}.$$

2. [**10pt**] En cours, nous avons vu que l'effet Compton crée un nouveau photon et un électron éjecté. L'énergie du nouveau photon est donné par

$$E' = \frac{E}{1 + \frac{E}{m_e c^2}(1 - \cos\theta)}, \tag{2}$$

où E' est l'énergie du photon sortant, E est l'énergie du photon incident, m_e la masse d'un électron, c la vitesse de la lumière et θ l'angle d'émission du photon résultant.

(a) La précédente formule peut être réécrite comme

$$E'(E, \theta). \tag{3}$$

Quel est le domaine de E' par rapport à θ ? En d'autres mots, quelles sont les valeurs possibles de θ ? [**1pt**]
Indice : Attention à la symétrie.

(b) Quelle est la valeur maximale de E' ? À quelle valeur de θ cela correspond-il ? [**5pt**]
Indice 1 : Considérez que E est fixe et ne travaillez qu'avec θ comme variable, i.e. tout le reste est constant.
Indice 2 : Ressortez vos notions de calcul différentiel.

(c) La réponse précédente est-elle raisonnable ? Justifiez en quelques mots, grâce à un raisonnement physique. [**2pt**]

(d) Esquissez $E'(E, \theta)$ en fonction de θ (soit pour un E fixe). [**2pt**]

(a) θ peut prendre des valeurs entre 0 et π. Par symétrie, pas besoin d'aller jusqu'à 2π.

(b) 1 pt pour la dérivée, 1 pt pour égale à 0, 1 pt pour n'existe pas, 1 pt pour la justification que c'est un max, 1 pt pour l'énergie.
L'idée est de trouver la dérivée de E' selon θ et de mettre le tout égal à 0 ou de trouver quand la deuxième dérivée n'existe pas.

$$\frac{\partial E'}{\partial \theta} = \frac{E^2 \sin\theta}{m_e c^2 \left(1 + \frac{E}{m_e c^2}(1 - \cos\theta)\right)^2}$$

Il y a deux possibilités : soit la dérivée égale 0, ou elle n'existe pas.
Pour que la dérivée égale 0 selon le domaine, θ doit égaler 0 ou π.
Pour que la dérivée n'existe pas, le dénominateur doit être égale à 0. Cela impliquerait que $\cos\theta = \frac{m_e c^2}{E} + 1$. Mais $\cos\theta$ ne peut pas être plus grand que 1. Cela ne peut donc pas arriver. Les seules solutions sont donc $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$.

$$E'(E, 0) = E \quad \text{et} \quad E'(E, \pi) = \frac{E}{1 + \frac{2E}{m_2 c^2}}.$$

$\theta = 0$ est le max, car l'autre est plus petit.
1 pt bonus si l'étudiant justifie au travers de la 1ere dérivée que c'est un maximum, en disant que c'est croissant sur tout le domaine (première dérivée positive).

(c) Oui, car, dans ce cas, le photon n'est pas dévié et donc ne perd pas d'énergie.

(d) Graphique.
4 pts boni si l'étudiant utilise la 2e dérivée et/ou un tableau des valeurs pour justifier son graphique. (total de 6/2 pour cette partie) 2 pts si l'étudiant fait une ligne droite entre les deux points. 1 pt si l'étudiant fait la courbe telle que décrite dans les manuels (n'a pas d'indication du point d'inflexion =¿ triche).

3. [**9pt**] L'effet photoélectrique transfère l'énergie d'un photon incident à un électron orbitale en l'ionisant, selon la relation

$$E_{e^-} = E_\gamma - \phi, \tag{4}$$

où E_{e^-} est l'énergie de l'électron, E_γ est l'énergie du photon incident et ϕ est l'énergie de liaison de l'électron.
En général, l'énergie de l'électron est sous forme cinétique.
Dans cet exercice, nous explorerons un exemple numérique.

(a) Supposons que l'énergie minimal d'un photon pour ioniser un électron soit de 13.6 eV (comme pour un électron de l'hydrogène). Quelle sera l'énergie cinétique de l'électron à ce moment ? À quelle vitesse de l'électron cela correspond-il ? [**1pt**]
Indice : Pas besoin de calculs ici.

(b) Quelle sera alors l'énergie de liaison ϕ, dans cette situation ? [**1pt**]
Indice : Pas besoin de calculs ici.

(c) Pour le même atome, quelle sera la vitesse d'un électron si le photon incident a une énergie de 30 eV ? Utilisez l'équation classique pour l'énergie cinétique :

$$K = \frac{1}{2}mv^2, \tag{5}$$

où m la masse, ici, de l'électron et v sa vitesse [**3pt**].
Indice : Attention aux unités !

(d) Pour le même atome, quelle sera la vitesse d'un électron si le photon incident a une énergie de 30 eV ? Utilisez l'équation relativiste pour l'énergie cinétique :

$$T = (\gamma - 1)mc^2, \tag{6}$$

où $\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$ est le facteur de Lorentz, m la masse, ici, de l'électron et v sa vitesse. [**3pt**]
Indice : Attention aux unités !

(e) Discutez, en quelques mots, de la pertinence (ou non-pertinence) de l'utilisation de l'énergie cinétique classique vs relativiste, i.e. équation 5 vs 6. [**1pt**]

(a) $K_{e^-} = 0 \Rightarrow v_e = 0.$

(b) $\phi = 13.6.$

(c) 1 pt pour la conversion d'unité eV en J, 1 pt pour l'utilisation correcte des formules, 1 pt pour la réponse.

$$\begin{aligned}
E_{e^-} &= E_\gamma - \phi \\
\Rightarrow \frac{1}{2}m_e v_e^2 &= E_\gamma - \phi \\
\Rightarrow v_e &= \sqrt{\frac{2(E_\gamma - \phi)}{m_e}} \\
&\approx 2.402 \cdot 10^7 m/s \\
&\approx 0.008c
\end{aligned}$$

(d) 1 pt pour la conversion d'unité eV en J, 1 pt pour l'utilisation correcte des formules, 1 pt pour la réponse.

$$\begin{aligned}
E_{e^-} &= E_\gamma - \phi \\
\Rightarrow (\gamma - 1) m_e c^2 &= E_\gamma - \phi \\
\Rightarrow \gamma &= \frac{(E_\gamma - \phi)}{m_e c^2} + 1 \\
\Rightarrow v_e &= c\sqrt{\frac{(E_\gamma - \phi)}{m_e c^2 + (E_\gamma - \phi)}} \\
&\approx 1.698 \cdot 10^7 m/s \\
&\approx 0.005c
\end{aligned}$$

(e) Nous sommes à moins de 1% de la vitesse de la lumière, mais il y a déjà une différence. La version relativiste est donc plus prudent.
Better safe than sorry, Caveat computor