PHY2300 Physique médicale
Hiver 2024
Addendum n°1
Convolution et Delta-Dirac

Mise en Context

Dans ce court document, l'exemple d'une convolution entre la distribution de Delta-Dirac et une fonction rectangle sera explorée. Le but sera de confirmer la propriété de commutativité de la convolution.

La fonction Delta-Dirac sera donnée comme étant :

$$s(x;a) = \delta(x-a), \tag{1}$$

où $a \in \mathbb{R}$.

La fonction rectangle sera, quant à elle, donnée par

$$r(x) = \begin{cases} A & , \text{si } x \in [b,c] \\ 0 & , \text{sinon} \end{cases} \tag{2}$$

La convolution sera ici dénotée par $\star$ et sera définie, pour deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$, comme étant

$$f(x) \star g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(x-\xi) d\xi. \tag{3}$$

1. Commençons par $s(x) \star r(x)$:

$$s(x) \star r(x) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\xi) r(x-\xi) d\xi$$

Puisque, pour $r(x)$, $x \in [b,c]$, alors, pour $r(x-\xi)$, $x-\xi \in [b,c]$, ce qui implique que $x-c \leq \xi \leq x-b$.

$$= \int_{x-c}^{x-b} \delta(\xi - a) A d\xi$$

Puisque a doit être entre $x-c$ et $x-b$, sinon $\delta(\xi - a) = 0$:

$$= \begin{cases} A & , \text{si } x-c \leq a \leq x-b \\ 0 & , \text{sinon} \end{cases}$$

En réisolant x dans $x-c \leq a$ et $a \leq x-b$:

$$= \begin{cases} A & , \text{si } b+a \leq x \leq c+a \\ 0 & , \text{sinon} \end{cases}$$

2. Ensuite, faisons $r(x) \star s(x)$:

$$\begin{aligned} r(x) \star s(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} r(\xi) s(x-\xi) d\xi \\ &= \int_{b}^{c} A\delta\left([x-\xi]-a\right) d\xi && \text{(Car } r(x)=0 \text{ si } x \notin [b,c]) \\ &= \begin{cases} A & \text{, si } b \leq x-a \leq c \\ 0 & \text{, sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} A & \text{, si } b+a \leq x \leq c+a \\ 0 & \text{, sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Dans les deux cas,

$$\boxed{r(x) \star s(x) = s(x) \star r(x) = \begin{cases} A & \text{, si } x \in [b+a, c+a] \\ 0 & \text{, sinon} \end{cases}} \tag{4}$$

Dans les deux cas, le résultat est le même, tel qu'espéré. De plus, il s'agit d'une fonction rectangulaire dans chaque cas. Cela n'est pas surprenant, puisque la fonction $\delta(x)$ est l'élément identité et ici le a ne crée qu'un décalage. Si a avait été 0, nous aurions que $r(x) \star s(x; a=0) = r(x)$.